MASTER DE MATHÉMATIQUES M1 - UPMC
SUJETS T.E.R. - 2022/2023

FRÉDÉRIC KLOPP
RESPONSABLE DES T.E.R.

Date: 1er février 2023.

Encadrant(e)(s)	Bureau	Courriel	Intitulé du ou des sujets	Étudiant(e)(s)
Luis Almeida Chiara Villa	16-26-321	luis.almeida@sorbonne-universite.fr chiara.villa.1@sorbonne-universite.fr	Modèles d' évolution de tumeurs	
Anne-Laure Basdevant	16-26-125	basdevant@lpsm.paris	Percolation de premier passage	Thomas Quarck Mateo Deangeli Bravo
Anna Ben-Hamou	15-16-209	anna.ben-hamou@upmc.fr	Temps de mélange de marches aléatoires	Elie Jabbour David Moldaz
Claire Boyer Alexis Ayme	15-25-220	claire.boyer@upmc.fr alexis.ayme@sorbonne-universite.fr	Etude comparative des méthodes de prédiction avec données manquantes	
Claire Boyer	15-25-220	claire.boyer@upmc.fr	Introduction à l' inférence causale	
			Optimisation et généralisation en apprentissage	Eyal Vayness
			Une introduction à la prédiction conformelle	Emilio Picar
Cyril Demarche	16-26-513	demarche@math.jussieu.fr	Autour des nombres de Markoff	Elric Isoardo
			Autour du théorème de Quillen-Suslin	Sarah El Boustany
Bruno Despres	15-25-317	despres@ann.jussieu.fr	Méthodes de descente de Gradient Stochastique et Réseaux de Neurones	Adrien Zabat
Romain Dujardin	16-26-112	antoine.ducros@imj-prg.fr	Linéarisation des points fixes indifférents en dynamique holomorphe	Théo Virot
Mathieu Florence	16-26-502	mathieu.florence@imj-prg.fr	Théorème 90 de Hilbert et représentations des groupes finis	
			Théorème de l' invariance du domaine	Laura Constant
Omer Friedland	16-26-408	omer.friedland@imj-prg.fr	Autour du théorème de Dvoretzky	
Benjamin Girard	15-16-114	benjamin.girard@imj-prg.fr	La méthode isopérimétrique d' Hamidoune	Carmen Arana
Jimmy Lamboley	15-16-112	jimmy.lamboley@imj-prg.fr	Problème isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$	Gabriel Singer
Emmanuel Lepage	16-26-402	elepage@imj-prg.fr	Fibré tangent des sphères et K-théorie topologique	Etienne Piasecki
Frédéric Paugam	15-25-518	frederic.paugam@imj-prg.fr	Géométrie analytique de Berkovich globale	Adèle Giraud
Marco Robalo	15-25-512	marco.robalo@imj-prg.fr	Catégories et Homotopie	Tommy-Lee Klein
Stéphane Robin	15-25-221	stephane.robin@sorbonne-universite.fr	Modèles à blocs latents et réseaux écologiques	Paul Le Franc
Shu Shen	15-25-523	shu.shen@imj-prg.fr	La formule de Duistermaat-Heckman	Sina Rouhani
Damien Simon	16-26-2-07	damien.simon@lpsm.paris	Processus déterminantaux, du discret au continu	Louise Moulin

Modèles d'évolution de tumeurs

Proposé par Luis Almeida et Chiara Villa

Mots-clés : apprentissage supervisé, modélisation, Équations aux dérivées partielles, mathématiques pour la biologie

La modélisation mathématique joue un rôle de plus en plus important dans la lutte contre le cancer en donnant un cadre théorique pour l'étude de nouvelles hypothèses sur la dynamique tumorale et pour l'optimisation des traitements.

Les cellules tumorales ont la capacité de s'adapter à leur conditions environnementales de façon à maximiser leur chances de survie et l'apparition naturelle d'une hétérogénéité phénotypique intra-tumorale crée de obstacles majeurs aux sucés thérapeutique. Récemment, un grand nombre de modèles mathématiques ont été proposés pour décrire et étudier la dynamique évolutive des cellules cancéreuses. En plus de l'intérêt pour l'application, ces modèles comportent des systèmes d'équations de réaction-diffusion (ou de réaction-advection-diffusion) et ont aussi un intérêt mathématique per se.

Dans ce TER vous apprendrez comment traduire les hypothèses biologiques en termes mathématiques et ferez une étude analytique et/ou numérique permettant de voir comment l'hétérogénéité tumorale varie dans l'espace et dans le temps dans des tumeurs vascularisées.

Contact ; luis.almeida@sorbonne-universite.fr et chiara.villa1@sorbonne-universite.fr

REFERENCES

1. Villa, C., Chaplain, M. A., & Lorenzi, T. (2021). Modeling the emergence of phenotypic heterogeneity in vascularized tumors. SIAM Journal on Applied Mathematics, 81(2), 434-453.
2. Villa, C., Chaplain, M. A., & Lorenzi, T. (2021). Evolutionary dynamics in vascularised tumours under chemotherapy : mathematical modelling, asymptotic analysis and numerical simulations. Vietnam Journal of Mathematics, 49(1), 143-167.
3. Chisholm, R. H., Lorenzi, T., Lorz, A., Larsen, A. K., Almeida, L. N. D., Escargueil, A., & Clairambault, J. (2015). Emergence of drug tolerance in cancer cell populations : an evolutionary outcome of selection, nongenetic instability, and stress-induced adaptation. Cancer research, 75(6), 930-939.
4. Perthame, B. (2006). Transport equations in biology. Springer Science & Business Media.
5. LeVeque, R. J. (2007). Finite difference methods for ordinary and partial differential equations : steady-state and time-dependent problems. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Sujet TER : Percolation de premier passage

proposé par Anne-Laure Basdevant

En 1965, Hammersley et Welsh introduisent un modèle probabiliste modélisant la vitesse d'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux : *la percolation de premier passage*. Ce modèle peut être défini sur tout graphe $G = (V, E)$, mais nous nous restreindrons dans ce travail au cas de $\mathbb{Z}^d$. Plus précisement, on se donne une loi τ sur $[0, \infty)$ et on considère une famille $\{t(e), e$ arêtes de $\mathbb{Z}^d\}$ de variables aléatoires positives i.i.d. de loi τ, où $t(e)$ représente le temps nécessaire au fluide pour traverser l'arête e. De façon naturelle, on définit un chemin $\gamma := (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ comme une suite de sommets de $\mathbb{Z}^d$ tels que pour tout i, $\{v_i, v_{i+1}\}$ soit une arête de $\mathbb{Z}^d$. Le temps de passage le long du chemin γ est alors

$$T(\gamma) := \sum_{i=1}^{n} t(\{v_{i-1}, v_i\})$$

et le temps de passage entre deux sommets x et y de $\mathbb{Z}^d$ est donné par

$$D(x, y) := \inf\{T(\gamma), \gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y\}.$$

Ainsi, $D(x, y)$ représente le temps qu'il faut au fluide pour aller du sommet x au sommet y et peut-être vu comme une (pseudo)-distance sur $\mathbb{Z}^d$. Le but du projet sera alors d'étudier l'asymptotique de la boule de rayon n pour cette distance, $B(0, n)$, lorsque n temps vers l'infini. On montrera en particulier un théorème de forme du à Cox et Durett établissant que $B(0, n)$ croit linéairement en n. Enfin, on étudiera en particulier cette boule lorsque les temps de passage sont exponentiels c'est-à-dire dans le cas du *modèle d'Eden*.

Bibliographie

1. H. Kesten. Aspects of first passage percolation. In école d'été de probabilités de Saint Flour, XIV–1984, volume 1180 of Lecture Notes in Math., pages 125–264. Springer, Berlin, 1986.
2. A. Auffinger, M. Damron, and J. Hanson. 50 years of first-passage percolation, volume 68 of University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017
3. D.Dhar. First passage percolation in many dimensions. Physics Letters A 130 (1988) no.4-5, 308–310.
4. O. Couronné, N. Enriquez, and L. Gerin. Construction of a short path in high dimensional first-passage percolation, Electronic Communications in Probability, vol.16 (2011) p.22-28.

Temps de mélange de marches aléatoires

ENCADRANTE : ANNA BEN-HAMOU

Le but de ce TER est d'introduire à la théorie des temps de mélange de chaînes de Markov, et plus particulièremeent des marches aléatoires sur les graphes.

Nous commencerons par étudier l'ouvrage de référence sur le sujet, *Markov chains and mixing times* [1]. Nous nous intéresserons particulièrement au phénomène de cutoff, qui correspond à une convergence abrupte de la chaîne vers sa mesure stationnaire.

Puis, nous étudierons l'article récent de Salez [2], qui fournit un critère général pour l'occurence du cutoff, basé sur la notion de courbure.

Références

[1] D. A. Levin, Y. Peres, and E. L. Wilmer. *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Soc., 2009.

[2] J. Salez. Cutoff for non-negatively curved markov chains. *arXiv preprint arXiv :2102.05597*, 2021.

Etude comparative des méthodes de prédiction avec données manquantes

Mots-clés : apprentissage supervisé, généralisation, données manquantes

Les données manquantes sont présentes dans la plupart, sinon la totalité, des ensembles de données du monde réel. Cela est dû, par exemple, à l'oubli de réponse dans un questionnaire, à la défaillance de l'appareil de mesure, au manque de temps pour procéder à des mesures dans une situation d'urgence, ou encore à l'agrégation d'ensembles de données provenant de sources multiples (ne mesurant non-nécessairement les mêmes variables). De nombreux travaux ont porté sur l'inférence des paramètres (par exemple, ceux d'un modèle linéaire) en présence de valeurs manquantes, en essayant d'estimer les coefficients de régression même en l'absence de plusieurs variables d'entrées décrivant les individus. Une autre perspective de recherche prometteuse dans le domaine des valeurs manquantes consiste à les considérer dans un cadre d'apprentissage supervisé, dans lequel l'objectif est de prédire la meilleure valeur pour la variable de sortie, et non d'estimer les paramètres de régression [1].

Des travaux récents ont montré que l'imputation des données manquantes, c'est-à-dire le remplacement des valeurs manquantes par certaines quantités (soit déterministes, par exemple zéro, soit aléatoires, par exemple la moyenne) est asymptotiquement efficace dans un but de prédiction [2], si tant est que les prédicteurs entraînés soient “puissants” (excluant alors les modèles simples de régression linéaire).

D'autres travaux récents se sont concentrés sur la régression linéaire avec des valeurs manquantes, soulignant la difficulté de la tâche malgré son apparence simpliste. Ceci est notamment dû au nombre exponentiel de “motifs” de valeurs manquantes qui peuvent survenir dans l'ensemble des données explicatives en entrée. Dans ce contexte, une nouvelle méthode simple consistant à effectuer des moindres carrés ordinaires spécifiques à chaque motif de données manquantes observé fréquemment s'avère “consistante” théoriquement : avec un nombre infini de données, les prédictions apportées par une telle méthode ne peuvent être meilleures. Cependant, lorsque un nombre fini de données est à disposition (ce qui est toujours le cas dans la pratique), ce n'est sans doute pas la meilleure méthode à considérer [3].

Après s'être familiarisé avec les enjeux de l'apprentissage supervisé, le but de ce TER sera (i) d'appréhender théoriquement le problème des données manquantes pour la prédiction à l'aide d'un modèle linéaire, (ii) de procéder à une étude numérique comparative des différentes méthodes de prédiction afin de comprendre leur comportement dans un contexte non-asymptotique.

Contact
Claire Boyer (claire.boyer@sorbonne-universite.fr), 15-25-220
Alexis Ayme (alexis.ayme@sorbonne-universite.fr), 15-25-228

Si intéressé·e, et seulement si réellement motivé·e par le sujet, merci de nous envoyer un e-mail avec votre CV, vos notes de L3 et les notes obtenues au premier semestre de M1.

Références

[1] On the consistency of supervised learning with missing values. Josse, Prost,, Scornet & Varoquaux (2019).
[2] What's a good imputation to predict with missing values?. Le Morvan, M., Josse, J., Scornet, E., & Varoquaux, G. (2021). Published in NeurIPS
[3] Near-optimal rate of consistency for linear models with missing values. Ayme, A., Boyer, C., Dieuleveut, A., & Scornet, E. (2022, June). Published in ICML.

Introduction à l’inférence causale

Mots-clés : apprentissage statistique, causalité,

Les questions qui motivent la plupart des études dans le domaine de la santé et des sciences sociales et comportementales ne sont pas de nature associative mais causale.
Par exemple, quelle est l'efficacité d'un médicament donné dans une population donnée ? Les données peuvent-elles prouver qu'un employeur est coupable de discrimination à l'embauche ? Quelle fraction des crimes passés aurait pu être évitée par une politique donnée ? Quelle était la cause du décès d'un individu donné dans un incident spécifique ? Ce sont des questions causales car elles nécessitent une certaine connaissance du processus de génération des données; Elles ne peuvent pas être calculées à partir des données seules, ni à partir des distributions qui régissent les données.

Ce TER vise à rendre les progrès récents de l’inférence causale accessibles et en quoi l’approche est foncièrement différente de l'analyse statistique standard. Pour ce faire, on pourra étudier une théorie unificatrice, appelée "structurelle", dans le cadre de laquelle la plupart (sinon tous) les aspects de la causalité peuvent être formulés, analysés et comparés.

Contact
Claire Boyer (claire.boyer@sorbonne-universite.fr), 15-25-220
Si intéressé·e, et seulement si réellement motivé·e par le sujet, merci de m’envoyer un e-mail avec votre CV, vos notes de L3 et les notes obtenues au premier semestre de M1.

[1] Causal inference in statistics: An overview, Judea Pearl (2008)
[2] The Book of Why: The New Science of Cause and Effect, Judea Pearl and Dana Mackenzie

Optimisation et généralisation en apprentissage

Mots-clés : apprentissage, algorithme de gradient stochastique, optimisation sharpness-aware

La plupart des méthodes d'apprentissage automatique peuvent être obtenues par la minimisation d'une fonction de risque (ou de maximisation de vraisemblance). A cette fin, les algorithmes de gradient stochastiques sont devenus très populaires [1].

Au cours de la dernière décennie, l'apprentissage automatique théorique a été confronté à une crise. L'apprentissage profond, basé sur l'entraînement d'architectures neuronales complexes, est devenu l'état de l'art pour de nombreux problèmes pratiques, de la vision par ordinateur au jeu de Go en passant par le traitement du langage naturel et même pour des problèmes scientifiques fondamentaux, comme, récemment, la prédiction du repliement des protéines. Pourtant, la théorie mathématique de l'apprentissage statistique, largement développée dans les années 1990 et 2000, a eu du mal à fournir une explication convaincante de ses succès, et encore moins à aider à concevoir de nouveaux algorithmes ou à fournir des conseils pour améliorer les prédicteurs entraînés.

L'interpolation, c'est-à-dire l'idée d'ajuster exactement les données d'apprentissage, et la sur-paramétrisation, c'est-à-dire le fait d'avoir suffisamment de paramètres pour satisfaire les contraintes correspondant à l'ajustement des données, fournissent une perspective sur certains des aspects les plus surprenants des méthodes prédictives en jeu.

Il est intéressant de souligner que l'interpolation de données bruitées est un concept profondément inconfortable et contre-intuitif pour les statistiques, tant théoriques qu'appliquées, car il s'agit traditionnellement d'un ajustement excessif aux données.
De même, la surparamétrisation est étrangère à la théorie de l'optimisation, qui est traditionnellement plus intéressée par les problèmes convexes avec des solutions uniques ou les problèmes non convexes avec des solutions localement uniques.
En revanche, les problèmes d'optimisation sur-paramétrés considérés ces dernières années ne sont par essence jamais convexes et n'ont pas de solutions uniques, même localement. Au lieu de cela, la solution choisie par l'algorithme dépend des spécificités du processus d'optimisation.

Le but de ce TER sera d'analyser les liens qu'il peut y avoir entre procédure d'optimisation et capacité de généralisation du prédicteur ainsi formé. Pour ce faire, on étudiera les biais implicites d'une descente de gradient "simple" pour un réseau de neurone diagonal [5], et une ouverture vers l'optimisation "sharpness-aware" [3,4] pourra également être envisagée.

Contact

Claire Boyer (claire.boyer@sorbonne-universite.fr), 15-25-220

Si intéressé·e, et seulement si réellement motivé·e par le sujet, merci de m'envoyer un e-mail avec votre CV, vos notes de L3 et les notes obtenues au premier semestre de M1.

[1] Optimization Methods for Large-Scale Machine Learning, Bottou, Curtis, Nocedal (2018) https://arxiv.org/pdf/1606.04838.pdf
[2] Fit without fear: remarkable mathematical phenomena of deep learning through the prism of interpolation, Belkin (2021) https://arxiv.org/pdf/2105.14368.pdf
[3] Sharpness-aware Minimization for Efficiently Improving Generalization, Pierre Foret, Ariel Kleiner, Hossein Mobahi, Behnam Neyshabur (2020)
[4] Towards Understanding Sharpness-Aware Minimization, Andriushchenko & Flammarion (2022)
[5] Kernel and rich regimes in overparametrized models, Woodworth, B., Gunasekar, S., Lee, J. D., Moroshko, E., Savarese, P., Golan, I., Soudry, D., and Srebro, N. COLT (2020)

Une introduction à la prédiction conformelle

Mots-clés : apprentissage supervisé, prédiction conformelle, apprentissage statistique

Les modèles d'apprentissage automatique de type "boîte noire" sont désormais couramment utilisés dans des contextes à risque élevé, comme l'aide au diagnostic médical, qui exigent une quantification de l'incertitude pour éviter les défaillances du modèle de prédiction. La prédiction conforme (aussi appelée inférence conforme) est un paradigme simple permettant de créer des intervalles d'incertitude statistiquement rigoureux pour les prédictions de ces modèles.
Il est essentiel que cette quantification d'incertitude soit valide indépendamment de la distribution des données en présence, et qu'elle jouisse de garanties explicites, non asymptotiques, même sans hypothèses de distribution ou de modèle. On peut utiliser la prédiction conforme avec n'importe quel modèle pré-entraîné (tel qu'un réseau de neurones, une régression linéaire, un SVM, etc.) pour produire des ensembles dont on garantit qu'ils contiennent la véritable prédiction visée avec une probabilité spécifiée par l'utilisateur, telle que 90%. Elle est facile à comprendre, à utiliser et générale, s'appliquant naturellement aux problèmes qui se posent dans les domaines de la vision par ordinateur, du traitement du langage naturel, de l'apprentissage par renforcement, etc.

Le but du TER est de se familiariser avec des techniques de prédiction conformelle, et d'en acquérir une compréhension théorique et pratique. La grille de lecture inclura notamment le document introductif suivant [1].

Contact
Claire Boyer (claire.boyer@sorbonne-universite.fr), 15-25-220
Si intéressé·e, et seulement si réellement motivé·e par le sujet, merci de m'envoyer un e-mail avec votre CV, vos notes de L3 et les notes obtenues au premier semestre de M1.

[1] A Gentle Introduction to Conformal Prediction and Distribution-Free Uncertainty Quantification, Anastasios N. Angelopoulos and Stephen Bates
https://arxiv.org/pdf/2107.07511.pdf

Autour des nombres de Markoff

Cyril Demarche, `cyril.demarche@imj-prg.fr`

Le but du TER est d'étudier les nombres de Markoff, leurs liens avec d'autres objets de la théorie des nombres, et si le temps le permet, d'évaluer leur densité.

Étudiée depuis la fin du 19 ème siècle, l'équation de Markoff est une célèbre équation diophantienne :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\,.$$

Un nombre de Markoff est l'une des coordonnées x, y ou z d'une solution de l'équation, formée d'entiers strictement positifs. La suite des nombres de Markoff commence ainsi : 1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, 610, 985, ...

On montrera d'abord qu'il y a une infinité de nombres de Markoff, puis on étudiera un algorithme pour les construire tous grâce à un arbre.

Dans un second temps, on établira un lien précis entre les nombres de Markoff et deux questions importantes en théorie des nombres :

— les formes quadratiques binaires indéfinies et leurs minima (Zolotarev, Markoff, Minkowski, ...).

— la qualité de l'approximation des nombres réels par des rationnels (Dirichlet, Hurwitz, Lagrange, ...).

Enfin, suivant Zagier, on s'intéressera à la quantité de nombres de Markoff, et plus précisément à leur densité parmi les entiers naturels.

Références

[1] J. W. S. CASSELS, "An Introduction to Diophantine Approximation", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957.

[2] C. SERIES, "The Geometry of Markoff Numbers", The Mathematical Intelligencer, vol 7, 20–29 (1985).

[3] D. ZAGIER, "On the Number of Markoff Numbers Below a Given Bound", Mathematics of Computation, vol 39, number 160, 709–723 (1982).

Autour du théorème de Quillen-Suslin

Encadrant : Cyril Demarche
cyril.demarche@imj-prg.fr

En 1955, dans son article *Faisceaux algébriques cohérents*, Serre demande s'il existe des $k[x_1, \ldots, x_n]$-modules projectifs de type fini qui ne sont pas libres (k est un corps). Cette question se reformule en géométrie algébrique : existe-t-il des fibrés vectoriels non triviaux sur l'espace affine $\mathbf{A}_k^n$? Elle est inspirée par le fait qu'en topologie, l'espace affine est contractile, et donc tout fibré vectoriel topologique est trivial. L'analogue algébrique de ce résultat est plus délicat, et il a été résolu en 1976, indépendamment par Quillen et Suslin. Et effectivement, tout fibré vectoriel algébrique sur $\mathbf{A}_k^n$ est trivial. L'objectif du TER est d'étudier deux preuves élémentaires de ce théorème, dues à Vaserstein et Suslin. Ces deux preuves reposent sur la notion de ligne unimodulaire, et sur une généralisation de la forme d'Hermite d'une matrice à coefficients dans un anneau commutatif. Quand l'anneau est euclidien (ce qui est le cas de $k[X]$), le théorème classique de réduction des matrices à leur forme normale d'Hermite donne une preuve du résultat souhaité dans le cas $n = 1$. Pour $n \geq 2$, il s'agit d'étudier la question de compléter une ligne unimodulaire (à coefficients dans $k[x_1, \ldots, x_n]$) en une matrice inversible à coefficients dans cet anneau.

On s'intéressera dans un premier temps à ces deux preuves élémentaires qui généralisent la forme d'Hermite, puis on fera le lien avec le point de vue des modules projectifs, puis, si le temps le permet, avec le point de vue de la géométrie algébrique. On pourra également s'intéresser ensuite aux groupes de K-théorie $K_1(R)$, pour certains anneaux R.

Références

[1] T. Y. Lam, *Serre's problem on projective modules*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. xxii+401 pp.

[2] F. Ischebeck et R. Rao, *Ideals and reality. Projective modules and number of generators of ideals*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. xiv+336 pp.

Méthodes de descente de Gradient Stochastique et Réseaux de Neurones
Sujet proposé par Bruno Després (despres@ann.jussieu.fr)

Les méthodes de descente de gradient stochastique sont centrales pour la phase d'optimisation numérique des poids dans les réseaux de neurones artificiels. Le sujet de TER proposé se concentrera dans un premier temps sur la structure mathématique de ces algorithmes. Il y aurait une partie théorique qui présenterait la théorie générale à partir d'ouvrages de la littérature [4, 5, 3] et une partie de recherche à partir deux articles de recherches récents [1, 2]. Les estimations de performance de ces nouveaux algorithmes seront détaillées. En fonction de l'avancement de l'étude, une simulation numérique d'approximation en réseaux de neurones de solutions d'une EDP simple pourra être envisagée avec un logiciel de la discipline (à déterminer).

References

[1] S. Ghadimi and G. Lan, Stochastic First- and Zeroth-order Methods for Nonconvex Stochastic Programming, arxiv preprint `https://arxiv.org/abs/1309.5549`, 2022.

[2] Y. Yan, T. Yang, Z. Li, Q. Lin, and Yi Yang, A Unified Analysis of Stochastic Momentum Methods for Deep Learning, arxiv preprint https://arxiv.org/abs/1808.10396 2022.

[3] G. Strang, Linear Algebra and Learning from Data, Wellesley-Cambridge Press, 2019.

[4] I. Goodfellow, Y. Bengio, and A. Courville. *Deep Learning.* MIT Press, 2016. `http://www.deeplearningbook.org`.

[5] B. Després, Neural Networks and Numerical Analysis Volume 6 in the series De Gruyter Series in Applied and Numerical Mathematics, 2022.

LINÉARISATION DES POINTS FIXES INDIFFÉRENTS EN DYNAMIQUE HOLOMORPHE

SUJET PROPOSÉ PAR ROMAIN DUJARDIN

Une technique de base dans l'étude d'un système dynamique est l'analyse de son comportement près des points fixes (et plus généralement périodiques). Il est naturel de se demander si la dynamique peut être ramenée à celle d'une application linéaire : c'est la question de la *linéarisation*. Dans ce projet on s'intéressera au cas des applications holomorphes en dimension (complexe) 1. Soit donc f une application holomorphe définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, et telle que $f(z) = \alpha z + O(z^2)$, la question est de savoir si f est localement conjuguée à $z \mapsto \alpha z$. Si $0 < |\alpha| \neq 1$ la réponse est assez simple.

Le cas subtil est celui de $\alpha = e^{2i\pi\theta}$ avec θ irrationnel. Dans ce cas la réponse dépend des propriétés arithmétiques de θ et éventuellement du caractère global ou non de la transformation f. Plus précisément, si θ est suffisamment bien approché par les rationnels, alors f est linéarisable (théorèmes de Siegel (1942) et Brjuno(1965)), et inversement si θ est suffisamment mal approché par les rationnels, f ne l'est en général pas (théorème de Cremer (1927)). La frontière entre les deux régimes n'est pas encore tout à fait établie, mais elle est complètement comprise lorsque $f(z) = \alpha z + z^2$ (théorème de Yoccoz (1988)).

Références

[1] Xavier Buff et John H. Hubbard. *Dynamics in One Complex Variable.* Livre à paraître (Matrix editions).

[2] John Milnor. *Dynamics in One Complex Variable.* Annals of mathematics studies vol. 160, Princeton Univ. Press, 2000.

THÉORÈME DE L'INVARIANCE DU DOMAINE

SUJET DE TER, PROPOSÉ PAR MATHIEU FLORENCE

Le théorème de l'invariance du domaine est une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, à toute dimension $n \geq 1$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue injective. Alors $f(U)$ est ouvert, et f réalise un homéomorphisme de U sur $f(U)$. Dans ce TER, on se propose d'étudier en détails une démonstration "élémentaire" de ce théorème. On commencera par le lemme de Sperner (énoncé et démonstration purement combinatoire) duquel on déduira le théorème du point fixe de Brouwer, qu'on utilisera enfin pour démontrer le théorème d'invariance du domaine.

References

[1] T. Tao, *https://terrytao.wordpress.com/2011/06/13/brouwers-fixed-point-and-invariance-of-domain-theorems-and-hilberts-fifth-problem/*

Date: Janvier 2023.

THÉORÈME 90 DE HILBERT ET REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS

SUJET DE TER, PROPOSÉ PAR MATHIEU FLORENCE

Le théorème 90 de Hilbert est essentiel en théorie de Galois et en arithmétique. Il peut être considéré comme une généralisation de la théorie de Kummer, à l'aide de la cohomologie des groupes. Il s'énonce ainsi.
Soit E/F une extension de corps finie galoisienne, de groupe de Galois G.
Alors, pour tout entier $n \geq 1$, on a $H^1(G, \mathrm{GL}_n(F)) = 1$.
Dans le cas particulier où $F = \mathbb{Q}$, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $n = 1$, cela implique un fait classique et élémentaire: l'extension quadratique $E/\mathbb{Q}$ est de la forme $E = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, pour $d \in \mathbb{Q}^\times$, non carré.
L'objectif de ce TER est de comprendre ce théorème, ses applications, ainsi que des rudiments de cohomologie des groupes. On en verra une démonstration originale, par réduction au cas d'une extension cyclique de degré premier, et à $n = 1$. Ce cas est résolu à l'aide d'un argument simple, en représentations des groupes finis.
Ce TER est un bon complément au module "théorie de Galois".
Une bonne familiarité avec la théorie des groupes finis est souhaitable, mais il n'est pas nécessaire de connaître la théorie de leurs représentations.

References

[1] P. Gille, T. Szamuely, *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2006.

Date: Janvier 2023.

AUTOUR DU THÉORÈME DE DVORETZKY

OMER FRIEDLAND

Quelle est la forme des ensembles convexes en grande dimension? Le théorème de Dvoretzky nous assure que si n est assez grand, alors tout convexe de $\mathbb{R}^n$ a des sections de basse dimension qui sont presque sphériques. Le but de ce sujet de TER est de donner une introduction au théorème de Dvoretzky. Sans doute c'est le résultat le plus important de la théorie locale des espaces de Banach. En 1961, Aryeh Dvoretzky résout positivement une conjecture formulée en 1956 par Grothendieck en établissant le théorème fondamental suivant:

Theorem 1. *Soit n un entier, et $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N = N(n, \varepsilon)$ tel que si X est un espace normé de dimension N, il existe une application linéaire $T : \ell_2^n \to X$ telle que $\|T\|\|T^{-1}\| \leq (1 + \varepsilon)$ (où bien sûr T^{-1} est définie sur l'image de T).*

En 1971, Vitali Milman a donné une nouvelle preuve de ce théorème, par une méthode probabiliste, en utilisant la concentration de mesure sur la sphère. Ce fut l'un des points de départ du développement de l'analyse géométrique asymptotique. La preuve de Milman donne une estimation fine en fonction de n:

$$N(n, \varepsilon) \leq \exp(c(\varepsilon)n).$$

Cette dépendance par rapport à ε a été étudiée par Y. Gordon, G. Schechtman, et d'autres, mais la bonne dépendance reste toujours ouverte. Dans ce TER, on étudiera ces différentes preuves en s'appuyant, en particulier, sur les ouvrages [1, 2].

References

[1] Gilles Pisier, *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 94, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[2] Gideon Schechtman, *Euclidean sections of convex bodies*, Asymptotic geometric analysis, Fields Inst. Commun., vol. 68, Springer, New York, 2013, pp. 271–288.

LA MÉTHODE ISOPÉRIMÉTRIQUE D'HAMIDOUNE

BENJAMIN GIRARD

Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe simple, connexe et non complet. La *connectivité* de Γ, notée $\kappa(\Gamma)$, est définie comme le cardinal minimal d'un ensemble de sommets de Γ dont la suppression conduise à un graphe non connexe. On remarque aisément que la valeur de ce paramètre $\kappa(\Gamma)$ dépend exclusivement de la fonction *périmètre* ∂, qui à chaque $X \subseteq S$ associe $\partial(X) := \Gamma(X) \setminus X$, où $\Gamma(X)$ désigne le voisinage de X dans Γ.

Dans ce contexte, on appelle *atome* de Γ toute partie dont le périmètre, une fois supprimé, permette de déconnecter le graphe initial de la manière la plus économique possible, et qui soit elle-même de cardinal minimal pour cette propriété. À la fin des années 70, Hamidoune [1] proposa un analogue de cette notion, introduite par Mader dans le cas des graphes non orientés finis, permettant d'aborder le cas des graphes orientés localement finis.

D'importants résultats sur la connectivité en découlent qui, une fois appliqués au cas particulier des graphes de Cayley, permettent d'obtenir de nombreux théorèmes en combinatoire additive, des plus classiques à d'autres plus sophistiqués, concernant l'addition d'ensembles dans les groupes.

L'objectif de ce TER est, à partir des articles de survol [2, 3] et des références qu'ils contiennent, d'explorer cette approche et certaines de ses principales applications.

Références

[1] Y. ould Hamidoune *Sur les atomes d'un graphe orienté*, C.R. Acad. Sc. Paris Sér. A-B **284** (1977), 1253-1256.

[2] Y. ould Hamidoune *Some additive applications of the isoperimetric approach*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **58** (6) (2008), 2007-2036.

[3] Y. ould Hamidoune *The isoperimetric method*, In A. Geroldinger and I. Ruzsa, *Combinatorial Number Theory and Additive Group Theory*, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser (2009), 241-252.

Sorbonne Université, Université Paris Diderot, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche, IMJ-PRG, F-75005, Paris, Bureau 114 couloir 15-16, email: `benjamin.girard@imj-prg.fr`.

2022-2023
Sujet de TER
Master Mathématiques et Applications

Problème isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$

Sujet proposé par Jimmy Lamboley

Le problème isopérimétrique consiste à chercher à résoudre le problème d'optimisation de forme suivant :

$$\min\left\{P(\Omega), \quad \Omega\subset\mathbb{R}^n, \ \ |\Omega| = m\right\} \tag{1}$$

où $P(\cdot)$ est le "périmètre" de Ω, $|\cdot|$ son volume, et $m\in]0,+\infty[$.

Il est attendu depuis fort longtemps que la solution d'un tel problème est la boule euclidienne de volume m, ce qui se traduit par l'inégalité dite isopérimétrique. Mais une démonstration rigoureuse dans le cas général $n\geq 2$ devra attendre des développements modernes de l'analyse fonctionnelle et de la théorie géométrique de la mesure.

Dans ce travail d'initiation à la recherche, nous proposons :

1. de regarder l'histoire de ce problème, notamment autour des preuves incomplètes de Steiner qui manquaient d'une théorie d'existence, voir par exemple [1],
2. d'étudier une preuve directe de l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^2$ par les séries de Fourier par Hurwitz [3], ou par approximation par des polygônes,
3. d'étudier le cadre moderne permettant de définir le périmètre d'un domaine comme la variation totale de sa fonction caractéristique, et d'en déduire une théorie d'existence pour un tel problème, voir par exemple [2]
4. de comprendre la résolution complète du problème (1) par symétrisation.

Références

[1] V. Blåsjö, *The Isoperimetric Problem*, The American Mathematical Monthly, 112 :6, 526-566

[2] A. Henrot and M. Pierre, *Variation et optimisation de formes : une analyse géométrique*, Springer, 2005, Volume 48

[3] A. Hurwitz, *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 19 (1902) 357-408

Fibré tangent des sphères et K-théorie topologique

E. Lepage

Un théorème d'Adams affirme, entre autres, que le fibré tangent de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ est trivial si et seulement si $n = 1$, 2, 4 ou 8. Dans ces quatre cas, une trivialisation provient d'une structure d'algèbre à division sur $\mathbb{R}^n$, comme les quaternions ou les octonions pour $n = 4$ et 8, qui permet de translater par multiplication une base de l'espace tangent en un point. Pour montrer que dans les autres cas, le fibré tangent n'est pas trivial, on étudiera la K-théorie : elle associe à un espace topologique un anneau commutatif construit à partir de la catégorie des fibrés vectoriels. On étudiera au passage le théorème de périodicité de Bott, qui permet notamment de calculer la K-théorie des sphères, et la construction des opérateurs d'Adams ψ^k, qui sont additifs et agissent sur les fibrés en droites comme l'élévation à la puissance k.

Références

"Vector fields on spheres", J.F. Adams.
"Vector bundles and K-theory", A. Hatcher.
"K-theory, An introduction", M. Karoubi.

Géométrie analytique de Berkovich globale

Proposition de mémoire

Frédéric Paugam

frederic.paugam at imj-prg.fr

17 octobre 2022

La géométrie analytique est l'étude des espaces analytiques complexes, dont les modèles de base sont les polydisques complexes $D(0,1)^n \subset \mathbb{C}^n$ munis de leurs $\mathbb{C}$-anneaux de Banach de séries convergentes.

Dans son livre [Ber90], Vladimir Berkovich a introduit une notion générale d'espace analytique sur un anneau de Banach commutatif arbitraire. Lemanissier et Poineau ont ensuite développé la théorie générale dans leurs travaux, dont on trouve une présentation dans le livre [LP22].

Le but de ce mémoire est de s'initier aux premiers résultats élémentaires de la géométrie analytique de Berkovich, qui sont présentés dans le premier chapitre de son livre, par l'étude détaillée d'exemples simples.

Dans une première partie, on abordera les sujets suivants :

1. Définition du spectre de Berkovich d'un anneau de Banach en tant qu'espace topologique et de la transformée de Gelfand-Berkovich.
2. Présentation détaillée de plusieurs exemples issus de la géométrie complexe (transformations de Fourier-Laplace discrète et continue, droite affine sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$), démonstration élémentaire du théorème de Gelfand par Ostrowski.
3. Evocation d'exemples issus de la théorie des nombres (spectre de $(\mathbb{Z}, |\cdot|_\infty)$ et droite affine sur icelui), démonstration du théorème d'Ostrowski (par Emil Artin dans le premier chapitre de [Art67]).
4. Le faisceau des fonctions analytiques sur le spectre de $(\mathbb{Z}, |\cdot|_\infty)$.
5. Définition par Berkovich des adèles comme germes de fonctions analytiques.

Dans une deuxième partie, si le temps le permet, on démontrera quelques propriétés de base du spectre d'un anneau de Banach, et on donnera une description informelle de la classification des points de la droite affine sur l'anneau de Banach $(\mathbb{Z}, |\cdot|_\infty)$.

Prérequis :

— Un peu d'analyse complexe.
— Un peu d'algèbre.

Références

[Art67] Emil Artin. *Algebraic numbers and algebraic functions.* Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1967.

[Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[LP22] Thibaut Lemanissier and Jérôme Poineau. *Espaces de Berkovich sur* $\mathbb{Z}$ *: catégorie, topologie, cohomologie.* Livre. auteurs, 2022.

Sujet T.E.R. - Catégories et Homotopie.

proposé par Marco Robalo

2022-2023

Le but de ce TER est de fournir les outils de base de théorie de catégories de façon à acquérir les réflexes nécessaires pour travailler avec la théorie des ∞-catégories. L'accent sera mis sur des arguments homotopiques, indépendantes du modèle, notamment pour l'existence de limites, colimites, foncteurs adjoints et des questions de présentabilité.

Références:

- Riehl, E. - Categories in Context. https://math.jhu.edu/ eriehl/context.pdf
- Kashiawra, M., Schapira, P. - Categories and Sheaves. Chapter 1 to 7
- Vistoli, A. - Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory http://homepage.sns.it/vistoli/descent.pdf
- Kerodon

Sujet de TER : Modèles à blocs latents et réseaux écologiques

proposé par Stéphane Robin

2023

Les modèles à blocs latents (Govaert & Nadif, 2003) sont des modèles de mélanges permettant d'établir des classifications simultanées des lignes et des colonnes d'un tableau de données. Ces modèles sont notamment utilisés en écologie pour déterminer des groupes de plantes, d'une part, et d'insectes pollinisateurs, d'autre part, à partir de nombres de visites observées de différentes espèces d'insectes sur différentes espèces de plantes.

L'inférence statistique de ces modèles pose des problèmes spécifiques. La première raison en est que la répartition des plantes et des insectes dans leurs groupes respectifs est inconnue. La seconde est que la complexité de la structure de dépendance entre les différentes variables aléatoires impliquées dans le modèle (appartenance aux groupes, nombres de visites) nécessite le recours à des approximations variationnelles (Blei & al, 2017) pour mener à bien l'inférence des paramètres du modèle.

Le premier objectif de ce TER est la compréhension des modèles à blocs latents et de leur inférence au moyen d'approximations variationnelles.

Les modèles à blocs latents classiques ne permettent pas de prendre en compte des comportements connus comme le généralisme ou le spécialisme des espèces. Une première adaptation de ces modèles est donc nécessaire pour l'analyse de réseaux écologiques.

De plus, les écologues s'intéressent aux interactions indirectes entretenues par plantes entre elles, au travers de leurs relations avec les insectes pollinisateurs. L'indice de Müller (Müller & al., 1999) mesure de telles interactions. Les modèles à blocs latents peuvent alors permettre de déterminer des groupes de plantes entretenant, par exemple, des interactions préférentielles entre elles.

Le second objectif de ce TER est de proposer des extensions du modèle à blocs latents prenant en compte le comportement spécifiques des espèces et d'analyser les relations indirectes entre plantes.

Références.

- Govaert, G., & Nadif, M. (2003). Clustering with block mixture models. Pattern Recognition, 36(2), 463-473.
- Blei, D. M., Kucukelbir, A., & McAuliffe, J. D. (2017). Variational inference: A review for statisticians. Journal of the American statistical Association, 112(518), 859-877.
- Muller, C. B., Adriaanse, I. C. T., Belshaw, R., & Godfray, H. C. J. (1999). The structure of an aphid–parasitoid community. Journal of Animal Ecology, 68(2), 346-370.

LA FORMULE DE DUISTERMAAT-HECKMAN

PROPOSÉ PAR SHU SHEN

La formule de localisation de Duistermaat-Heckman (1982) affirme que la transformation de Fourier de la mesure canonique sur une variété symplectique est donnée exactement par l'approximation de la phase stationnaire. Une application formelle de la formule de Duistermaat–Heckman donnée par Witten conduit au théorème d'indice d'Atiyah–Singer.

Le but de ce T.E.R. est de démontrer la formule de Duistermaat-Heckman par déformation [B86], ce faisant, d'acquérir des techniques d'analyse sur les variétés. En particulier, le T.E.R. contient les sujets suivants :

(1) La cohomologie de de Rham.
(2) Connexions et courbures.
(3) La théorie de Chern-Weil.
(4) La formule de Duistermaat-Heckman.

Références

[A85] M. F. Atiyah, *Circular symmetry and stationary-phase approximation*, Astérisque (1985), no. 131, 43–59, Colloquium in honor of Laurent Schwartz, Vol. 1 (Palaiseau, 1983).

[B86] J.-M. Bismut, *Localization formulas, superconnections, and the index theorem for families*, Comm. Math. Phys. **103** (1986), no. 1, 127–166.

[B11] ———, *Duistermaat-Heckman formulas and index theory*, Geometric aspects of analysis and mechanics, Progr. Math., vol. 292, Birkhäuser/Springer, New York, 2011, pp. 1–55. MR 2809466 (2012g :58040)

[T17] L. W. Tu, *Differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 275, Springer, Cham, 2017, Connections, curvature, and characteristic classes.

[Z01] W. Zhang, *Lectures on Chern-Weil theory and Witten deformations*, Nankai Tracts in Mathematics, vol. 4, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.

Email address: `shu.shen@imj-prg.fr`

TER: Processus déterminantaux, du discret au continu.

Damien Simon (LPSM)

Année 2022–2023

Les processus déterminantaux sont des ensembles de points tirés aléatoirement sur un ensemble qui ont la propriété remarquable de "répulsion" entre les points. Cela permet en général d'obtenir des points plus dispersés qu'à partir de variables de Bernoulli indépendantes. Ces processus sont très utilisés à la fois en probabilités théoriques (matrices aléatoires), en probabilités appliquées pour générer des partitions et en physique quantique (fermions). Le but de ce projet est de décrire en détail la loi de ces processus, qui exprime les probabilités à partir de déterminants de matrices, de calculer de nombreuses espérances et d'étudier une méthode numérique de génération de réalisations indépendantes de ces processus.

Dans un deuxième temps, selon les intérêts et l'avancée du travail, on pourra appliquer ces processus à des problèmes de physique, de matrices aléatoires ou de statistiques ou encore commencer à étudier le cas continu.

Bibliographie.

— une introduction très rapide mais avec toutes les bases : Alex Kulesza Ben Taskar, Determinantal point processes for machine learning, `https://arxiv.org/pdf/1207.6083.pdf`

— J. Ben Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virag, Determinantal processes and independence, Probability Surveys, Vol. 3 (2006) 206–229, `https://arxiv.org/pdf/math/0503110.pdf`

— à compléter selon l'orientation du projet.

Prérequis : probabilités approfondies, un peu de programmation (Python ou C++).