MASTER

de sciences et technologies, Mention

MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Sorbonne Université

Année 2023-2024

[version du 24 juillet 2023]

Table des matières

Chapitre 1

Master 1

1.1 Objectifs

Le master 1 est la première année du master au cours de laquelle les étudiants doivent d'abord acquérir ou revoir des éléments fondamentaux pour la poursuite d'un cursus mathématique de haut niveau. Un choix assez large d'UE (unités d'enseignement) dites *fondamentales*, enseignées au premier semestre, doit permettre ce type d'acquisition. Par ailleurs, des UE *d'orientation*, enseignées au second semestre, permettent aux étudiants de faire un choix d'orientation en préparation de la seconde année du master, et du choix de l'une des huit spécialités du master 2, la seconde année du master.

1.2 Choix des unités d'enseignement du M1

Au premier semestre, l'étudiant doit choisir deux UE fondamentales de 12 ECTS chacune, ou une UE fondamentale de 12 ECTS et deux UE de 6 ECTS. Les 6 ECTS restants pour faire un semestre de 30 ECTS sont constitués comme suit :

— pour les étudiants présents [1], d'une UE de langue (à choisir parmi anglais, allemand, chinois, espagnol, russe et FLE (français langue étrangère)) de 3 ECTS et d'une UE d'Orientation et insertion professionnelle (OIP) de 3 ECTS ;

— pour les étudiants à distance, d'une UE d'anglais de 6 ECTS.

Au second semestre, toutes les combinaisons sont permises pour constituer un ensemble d'UE totalisant 30 ECTS.

Le choix des UE de M1 doit se faire en fonction des goÃżts, des acquis antérieurs, et bien entendu en fonction des souhaits d'orientation en M2. Nous ne proposons pas de parcours types, et chaque étudiant est libre de composer son contrat pédagogique comme il l'entend, en accord avec son directeur d'études (voir plus loin) et le responsable pédagogique.

Néanmoins, afin d'éviter des parcours pédagogiques thématiquement trop étroits, cette liberté dans la composition du contrat pédagogique est encadrée par quelques restrictions qui seront détaillées au paragraphe 1.6.

1. Par étudiants présents, nous entendons : étudiants dont l'inscription administrative est en présence.

1.3 Responsables et site

Laurent Boudin et Julien Grivaux (laurent.boudin@sorbonne-universite.fr, julien.grivaux@imj-prg.fr) sont les responsables du Master 1. Ils en coordonnent l'organisation et dirigent l'équipe pédagogique chargée de la mise en place des enseignements.

Le site web du Master 1 se trouve à l'adresse :

http://master.math.sorbonne-universite.fr/fr/niveau_m1.html

Des informations importantes sont également communiquées par le biais de Moodle :

https://moodle-sciences-23.sorbonne-universite.fr/

Des renseignements pratiques sur les inscriptions et le calendrier (page 168) du Master 1 sont disponibles au chapitre 12.

1.4 Orientation et Insertion Professionnelle (OIP)

L'orientation et l'insertion professionnelle des étudiants de master font l'objet d'une attention particulière à Sorbonne Université. Le site

http://master.math.sorbonne-universite.fr/fr/niveau_m1/travaux_d_etude_et_de_recherche_ter_stages2.html

(onglet Direction d'études et OIP) fournit de plus amples détails. Le responsable de l'OIP au sein du département du master de mathématiques est Bruno Després (bruno.despres@sorbonne-universite.fr).

1.4.1 Directeurs d'études (DE)

Dès son inscription pédagogique, chaque étudiant de M1 doit choisir un directeur d'études (DE) parmi une quinzaine d'enseignants-chercheurs. Chaque DE est en charge d'un groupe de 15 étudiants de M1 qu'il suit individuellement tout au long de l'année. Après une prise de contact en septembre, le DE rencontre régulièrement les étudiants, qui lui communiquent leurs résultats, lui font part de leur progression et de leurs difficultés éventuelles. Le DE conseille les étudiants pour leurs choix de cours au début de chaque semestre, ainsi que pour leur choix de M2, afin qu'ils empruntent le parcours le plus adapté à leur projet professionnel. À ce titre, le DE est aussi le responsable de son groupe pour l'UE MU4MAOIP.

Remarque : les redoublants ayant déjà validé l'UE MU4MAOIP seront affectés à un groupe de direction d'études par les responsables de l'OIP. Ils ne le choisissent pas eux-mêmes sur le site des inscriptions pédagogiques.

1.4.2 UE obligatoire MU4MAOIP (3 ECTS)

Les étudiants suivant au moins un cours en présentiel au premier semestre doivent obligatoirement s'inscrire à l'UE Orientation et Insertion professionnelle MU4MAOIP (3 ECTS). Tout au long du semestre, ils sont invités à réfléchir à leur orientation et à leur projet professionnel à l'occasion de différentes rencontres avec le milieu professionnel (conférences métiers, Atrium des métiers). Leur participation active à ces événements leur permettra de réaliser les 2 exposés-dossiers nécessaires pour valider l'UE d'OIP. Ces travaux seront évalués par les DE.

Remarque : Les étudiants suivant un parcours atypique (par exemple, reprenant leurs études après avoir exercé une activité professionnelle) peuvent faire une demande de dispense avant le début des enseignements. Cette demande doit être motivée par écrit auprès des responsables de l'UE.

1.4.3 Stages et TER industriels

Les étudiants de M1 sont vivement encouragés à établir un premier contact avec le monde de l'entreprise avant l'année décisive de M2. Pour ce faire, ils peuvent
– effectuer un stage, en dehors des semaines de cours. Cependant, il faut au préalable faire une demande de convention de stage auprès du responsables OIP du master (qui est Bruno Després). Avec leur accord, les formulaires de convention de stage sont ensuite délivrés par le secrétariat du M1. Les modalités sont détaillées sur le site web du master.
– effectuer un Travail d'Étude et de Recherche (TER) industriel, au cours du second semestre, sur un sujet proposé par un partenaire industriel et encadré par un enseignant-chercheur de Sorbonne Université.

1.5 Liste des UE

L'UFR de Mathématiques précise de la manière suivante la correspondance entre les ECTS et les heures de présence des étudiants, pour le M1.

Une UE de 12 ECTS : 120 heures d'enseignement pour les étudiants :
48 heures de cours (4 heures pendant 12 semaines)
72 heures de td (6 heures pendant 12 semaines).

Une UE de 6 ECTS : 60 heures d'enseignement pour les étudiants :
24 heures de cours (2 heures pendant 12 semaines)
36 heures de td (3 heures pendant 12 semaines).

Table 1.1 – **Liste des UE enseignées au premier semestre**

Les cours marqués d'un astérisque ∗ peuvent être suivis en télé-enseignement.

INTITULÉ	SEM.	ECTS	CODE
Géométrie affine et projective ∗	1er	12	001
Algèbre commutative ∗	1er	6	003
Algèbre linéaire effective ∗	1er	6	004
Bases d'analyse fonctionnelle ∗	1er	12	005
Basic functional analysis ∗ (Uniquement à distance)	1er	6	105
Fondements des méthodes numériques ∗	1er	12	006
Foundations of numerical methods ∗	1er	6	106
Analyse complexe et applications ∗	1er	6	008
Probabilités de base ∗	1er	12	010
Probabilités approfondies ∗	1er	12	011
Groupes et représentations ∗	1er	6	014
Statistique ∗	1er	12	015
Structures de données et algorithmes pour la programmation	1er	6	016
Géométrie différentielle ∗	1er	12	022
Calcul scientifique pour les grands systèmes linéaires ∗	1er	6	053
Systèmes dynamiques discrets et continus en biologie et médecine	1er	6	062

Table 1.2 – **Liste des UE enseignées au second semestre (par code)**
Les cours marqués d'un astérisque ∗ peuvent être suivis en télé-enseignement.

INTITULÉ	SEM.	ECTS	CODE
Théorie de Galois ∗	2^e	6	020
Groupes et algèbres de Lie ∗	2^e	6	024
Analyse fonctionnelle approfondie et calcul des variations ∗	2^e	12	025
Approximation des EDP elliptiques et problèmes d'évolution ∗	2^e	12	026
Équations d'évolution, stabilité et contrôle	2^e	6	028
Approximation des EDP elliptiques et simulation numérique ∗	2^e	12	029
Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz ∗	2^e	12	030
Théorie des nombres 1 ∗	2^e	6	033
Théorie des nombres 2 ∗	2^e	6	034
Cryptologie, cryptographie algébrique ∗	2^e	6	035
Processus de sauts ∗	2^e	6	036
Histoire d'un objet mathématique ∗	2^e	6	039
Géométrie algébrique effective ∗	2^e	6	043
TER (Travail d'étude et de recherche)	2^e	6	045
Systèmes dynamiques ∗	2^e	6	048
Stage en entreprise pour mathématiciens	2^e	6	055
Programmation en C++	2^e	6	056
Analyse convexe ∗	2^e	6	057
Topologie algébrique ∗	2^e	6	059
Introduction aux surfaces de Riemann	2^e	6	060
Modèles mathématiques en neurosciences	2^e	6	061
Calcul stochastique et introduction au contrôle stochastique ∗	2^e	12	065
Optimisation numérique et science des données ∗	2^e	6	066
Modélisation statistique ∗	2^e	6	071
Statistique avancée, grande dimension et données massives ∗	2^e	6	073
Probabilités numériques et machine learning ∗	2^e	12	074

Les UE du second semestre doivent être choisies en fonction de la spécialité envisagée en M2. Le tableau suivant indique les choix recommandés. Les huit parcours de M2 proposés sont :

`aa`	*Apprentissage et algorithmes*	`mod`	*Mathématiques de la modélisation*
`fin`	*Probabilités et finance*	`pro`	*Probabilités et modèles aléatoires*
`ing`	*Ingénierie mathématique*	`sta`	*Statistique*
`maf`	*Mathématiques fondamentales*	`agr`	*Agrégation*

Pour le parcours *Agrégation*, tous les cours sont recommandés.

Table 1.3 – **UE du second semestre et parcours de M2**

INTITULÉ	`aa`	`fin`	`ing`	`maf`	`mod`	`pro`	`sta`	ECTS	CODE
Théorie de Galois				•				6	020
Groupes et algèbres de Lie				•				6	024
Théorie des nombres 1				•				6	033
Théorie des nombres 2				•				6	034
Cryptologie, cryptographie algébrique				•				6	035
Topologie algébrique				•				6	059
Introduction aux surfaces de Riemann				•				6	060
Systèmes dynamiques				•				6	048
Analyse fonctionnelle approfondie et calcul des variations			•	•	•			12	025
Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz				•	•			12	030
Approximation des EDP elliptiques et problèmes d'évolution			•	•	•			12	026
Approximation des EDP elliptiques et simulation numérique		•	•		•	•		12	029
Équations d'évolution, stabilité et contrôle			•	•	•			6	028
Analyse convexe	•		•	•	•			6	057
Optimisation numérique et science des données	•		•		•			6	066
Modèles mathématiques en neurosciences					•			6	061
Géométrie algébrique effective				•				6	043
Processus de sauts	•	•	•			•	•	6	036
Calcul stochastique et introduction au contrôle stochastique	•	•	•			•	•	12	065
Modélisation statistique	•	•	•			•	•	6	071
Statistique avancée, grande dimension et données massives	•	•	•			•	•	6	073
Probabilités numériques et machine learning	•	•	•			•	•	12	074
Programmation en C++	•	•	•		•	•		6	056
Histoire d'un objet mathématique				•				6	039
TER (Travail d'étude et de recherche)	•	•	•	•	•	•	•	6	045
Stage en entreprise pour mathématiciens	•	•	•		•	•	•	6	055

1.6 Règle ABCD et incompatibilités

1. Les cours suivants sont incompatibles :

MU4MA005 Bases d'analyse fonctionnelle
MU4MA105 Basic functional analysis

2. Les cours suivants sont incompatibles :

MU4MA010 Probabilités de base
MU4MA011 Probabilités approfondies

3. Les cours suivants sont incompatibles :

MU4MA016 Structures de données et algorithmes pour la programmation
MU4MA056 Programmation en C++

4. Des points ont été attribués à un certain nombre de cours dans quatre catégories : A,B,C et D. La table 1.4 ci-dessous donne le détail du nombre de points de chaque cours dans chaque catégorie. Les cours qui ne figurent pas dans cette table n'entrent pas en ligne de compte dans ce qui suit.

Aux incompatibilités indiquées ci-dessus s'ajoutent les deux règles suivantes, qui visent à éviter des choix de cours thématiquement trop étroits.

4.1. Dans chacune des catégories A,B,C, la somme des points des cours choisis ne peut pas dépasser 36.

4.2. Dans la catégorie D, la somme des points des cours choisis ne peut pas dépasser 18. Cette limite est extensible à 24 sur avis du directeur d'études.

Table 1.4 – **Points attribués aux cours dans les catégories A,B,C et D.**

intitulé	code	A	B	C	D
Algèbre commutative	003			6	
Algèbre linéaire effective	004			3	
Bases d'analyse fonctionnelle	005		12		
Basic functional analysis	105		6		
Fondements des méthodes numériques	006		12		
Foundations of numerical methods	106		6		
Probabilités de base	010	12			
Probabilités approfondies	011	12			
Groupes et représentations	014			6	
Statistique	015	12			
Structures de données et algorithmes pour la programmation	016				6
Théorie de Galois	020			6	
Groupes et algèbres de Lie	024			3	
Analyse fonctionnelle approfondie et calcul des variations	025		12		
Approximation des EDP elliptiques et problèmes d'évolution	026		12		
Équations d'évolution, stabilité et contrôle	028		6		
Approximation des EDP elliptiques et simulation numérique	029		6		6
Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz	030		12		
Théorie des nombres 1	033			6	
Théorie des nombres 2	034			6	
Cryptologie, cryptographie algébrique	035			6	
Processus de sauts	036	6			
Géométrie algébrique effective	043			3	
Calcul scientifique pour les grands systèmes linéaires	053				6
Programmation en C++	056				6
Modèles mathématiques en neurosciences	061		3		
Systèmes dynamiques discrets et continus en biologie et médecine	062		3		
Calcul stochastique et introduction au contrôle stochastique	065	12			
Modélisation statistique	071	6			
Statistique avancée, grande dimension et données massives	073	6			
Probabilités numériques et statistiques computationnelles	074	6			6

1.7 Description des UE (classées par code)

MU 4MA 001 Géométrie affine et projective (12 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Ilia Itenberg
mél : ilia.itenberg@imj-prg.fr
url : https://webusers.imj-prg.fr/~ilia.itenberg/

Objectifs de l'UE : Ce cours, de nature généraliste, ouvre à la fois aux thèmes "Algèbre et géométrie" du M2 et à ceux de l'agrégation. On y étudiera les liens entre les géométries affine, projective et euclidienne, notamment dans le cas des coniques et en mettant l'accent sur les différents groupes de transformations qui caractérisent chacune de ces géométries. De plus, nous utiliserons des outils élémentaires de géométrie différentielle (espaces tangents, position par rapport à l'espace tangent). Le cours offrira aussi une ouverture vers la géométrie algébrique.

Prérequis : Connaissance en algèbre et géométrie du niveau licence.

Thèmes abordés : Géométrie affine : applications affines, barycentres, groupe affine. Géométrie projective : complété projectif d'un espace affine, repères projectifs, coordonnées homogènes, homographies, groupe projectif, birapport. Formes bilinéaires et formes quadratiques. Géométrie euclidienne : le groupe des isométries affines et le groupe des déplacements. Étude des coniques affines ou projectives. Géométrie différentielle : sous-variétés données par des équations polynomiales, espaces tangents. Quelques éléments de la géométrie hyperbolique : le demi-plan de Poincaré.

MU 4MA 003 Algèbre commutative (6 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Anna Cadoret
mél : anna.cadoret@imj-prg.fr
url : https://webusers.imj-prg.fr/~anna.cadoret/

Objectifs de l'UE : Introduire les bases de l'algèbre commutative qui sont indispensables pour ceux qui envisagent de poursuivre en M2, notamment en géométrie algébrique et théorie des nombres mais aussi plus généralement dans toute discipline utilisant des structures algébriques. La plupart des notions abordées sont utiles pour l'agrégation.

Prérequis : Connaissance en algèbre du niveau de la licence.

Thèmes abordés : Anneaux, idéaux, modules, constructions universelles (produits, algèbres de polynômes, sommes directes, localisation, produit tensoriel), conditions de finitude, anneaux euclidiens, principaux, factoriels, théorème de structures des modules sur les anneaux principaux et applications.

Remarque : Ce cours sera enseigné pendant la deuxième moitié du premier semestre, à partir de mi-octobre. La date exacte sera indiquée sur l'emploi du temps.

MU 4MA 004 Algèbre linéaire et polynômes d'endomorphismes : un point de vue effectif (6 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Antonin Guilloux
mél : `antonin.guilloux@sorbonne-universite.fr`

Objectifs de l'UE : Nous revisiterons des notions d'arithmétique et d'algébre linéaire de Licence, avec un point de vue effectif : quels sont les objets algébriques calculables, comment les calculer et à quel coÃżt ? Le but est de renforcer et approfondir les connaissances en algébre linéaire, tout en introduisant l'approche effective ; nous ne chercherons pas une programmation optimale des algorithmes et le cours est accessible sans aucun bagage informatique. Cette approche permet d'illustrer concrètement les objets fondamentaux de l'algébre.
Ce cours constitue notamment une bonne préparation à l'Agrégation externe de Mathématiques et en particulier une introduction à l'option "Algèbre effective et calcul formel". Il pourra utilement être complété par des cours du second semestre (en particulier "Introduction à la géométrie algébrique effective" ou "Méthodes algébriques effectives", mais aussi "Théorie des nombres" ou "Cryptographie"). Il permet aussi d'envisager par la suite un Master de Mathématiques fondamentales ou des débouchés en Mathématiques-Informatique : cryptologie, robotique, traitement du signal...

Prérequis : Connaissances générales en algébre de niveau L3.

Thèmes abordés :

1. **Rudiments de complexité**
   Nombre d'opérations dans $\mathbb{Z}$ ou un corps fini (complexité arithmétique), nombre d'opérations machine (cas simples), taille (espace mémoire) des objets calculés.
2. **Algorithme d'Euclide et applications**
   Rappels sur l'algorithme d'Euclide étendu : calculs du pgcd, des coefficients de Bézout. Applications et extensions : théorème chinois ; Algorithme de Berlekamp-Massey et recherche de récurrences linéaires ; Suites de Sturm.
3. **Calcul matriciel et théorie des $\mathbb{Z}$-modules**
   échelonnement effectif des matrices à coefficients dans un corps ou un anneau factoriel. Forme normale d'Hermite, de Smith. Applications et extensions : théorème des facteurs invariants, Z-modules de type fini.
4. **Polynômes d'endomorphismes et invariants en algèbre linéaire** Calcul des éléments caractéristiques d'un endomorphisme : polynôme annulateur, polynôme caractéristique, polynôme minimal. Décompositions (Frobenius, Jordan, Jordan-Chevalley et Dunford). Applications et extensions : matrices compagnons et formes quadratiques d'Hermite.
5. **Autres applications**
   Nous illustrerons ce cours par des applications dans des domaines divers : théorie des nombres, théorie du contrôle, optimisation, études des racines réelles de polynômes...

MU 4MA 005 Bases d'analyse fonctionnelle (12 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Delphine Salort
mél : dsalort@gmail.com
url : http://www.lcqb.upmc.fr/users/salort

Objectifs de l'UE : Le cours aborde l'analyse fonctionnelle de base dans son ensemble avec une orientation vers les applications aux équations aux dérivées partielles.

Prérequis : L'algèbre linéaire et la topologie de la troisième année de Licence sont impératifs.

Thèmes abordés : Dans l'ordre des chapitres : Espaces métriques, Espaces normés et espaces de Banach, Dualité dans les espaces de Banach, Espaces de Hilbert, Espaces L^p , La transformation de Fourier, Le problème de Dirichlet, Les distributions tempérées en dimension 1.
Même si le contenu du cours sera allégé, la version 2015 des notes de cours disponible à l'adresse https://www.ljll.math.upmc.fr/chemin/cours/4M005.html donne une bonne idée du contenu. De plus, un déroulé séance par séance du cours 2017 est disponible à la même adresse.
Le cours s'appuiera, entre autres, sur un ensemble de séquences vidéo réalisées par les enseignants pendant l'année 2017-2018 et qui détaillent des points précis du cours.

MU 4MA 105 Basic functional analysis (6 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Sergio Guerrero
mél : guerrero@ann.jussieu.fr

Ce cours est la premiére moitié de l'UE 4MA005 décrite ci-dessus. Le cours est enseigné en français mais s'appuie sur des séquences vidéo tournées en anglais.
Ce cours est ouvert uniquement aux étudiants à distance et, avec l'accord du directeur pédagogique, aux étudiants présents redoublants.

MU 4MA 006 Fondements des méthodes numériques : différences et éléments finis, Fourier, ondelettes (12 ECTS en deux parties de 6 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Albert Cohen
mél : cohen@ljll.math.upmc.fr

Objectifs de l'UE : Étudier les grandes familles de méthodes numériques utilisées pour la discrétisation et l'approximation des fonctions, en particulier des solutions d'équations aux dérivées partielles. La première partie du cours (qui constitue l'UE MU4MA106) aborde les méthodes de différences finies pour les problèmes aux limites et d'évolution, ainsi que leur analyse de convergence fondée sur des techniques d'algèbre matricielle et d'approximation numérique (stabilité et consistance). La seconde partie du cours aborde les méthodes d'éléments finis, et leur fondements théorique utilisant les espaces de Sobolev construits à partir de l'espace L^2. Elle traite aussi des techniques d'approximation utilisant les bases hilbertiennes de type Fourier et ondelettes qui ont des applications importantes en traitement du signal, de l'image et de l'information.

Prérequis : Des connaissances de base en calcul différentiel, équations différentielles ordinaires, intégration, algèbre linéaire numérique du niveau licence. Il est préférable d'avoir suivi un enseignement de niveau licence contenant des TP avec programmation.

Thèmes abordés : Méthode des différences finies; Applications à l'équation de transport, à l'équation de la chaleur et à un problème aux limites; Analyse numérique des méthodes : stabilité, consistance, ordre, convergence, estimation d'erreur; Approximation variationnelle des problèmes aux limites; Analyse hilbertienne, espaces de Sobolev, projection sur un convexe fermé; méthode des éléments finis, exemple des éléments de Lagrange; Approximation dans des bases hilbertiennes : polynômes orthogonaux, Fourier, Ondelettes; Mise en œuvre des méthodes lors des TP hebdomadaires.

Remarques : — Le cours donne lieu à un projet TP, qui sera à réaliser pendant les dernières séances de TP et qui comportera notamment une courte soutenance individuelle lors de la semaine des examens.
— Le cours est enseigné en français.

MU 4MA **106** **Foundations of numerical methods : differences and finite elements. (6 ECTS) (1er semestre)**

Professeur : Albert Cohen

mél : `cohen@ljll.math.upmc.fr`

Ce cours est la première moitié de l'UE 4MA006 décrite ci-dessus. Le cours est enseigné en français.
The course is delivered in French. Students who do not speak French will be given lecture notes in English and will have the possibility to discuss in English with the teacher.
Ce cours est ouvert exclusivement aux étudiants du parcours HPC (Calcul haute performance). Avec l'accord du directeur pédagogique et du responsable pédagogique, il peut être ouvert à un étudiant présent redoublant.

MU 4MA **008** **Analyse complexe et applications** (6 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Vincent Michel

mél : `vincent.michel@imj-prg.fr`

Objectifs de l'UE : Ce cours propose de contribuer avec l'analyse complexe à l'élaboration d'un socle pour l'analyse utile aussi bien aux agrégatifs qu'aux étudiants se destinant à la recherche. L'accent sera mis autant sur l'utilisation et la consolidation de la compréhension des grands théorèmes d'analyse vus en L3 que l'acquisition de nouvelles connaissances.

Prérequis : Intégration de Lebesgue (intégrale à paramètre, théorèmes de Fubini) et analyse complexe de licence.

Thèmes abordés :

Fonctions harmoniques : introduites comme celles de classe C^2 annulant le Laplacien, ce sont aussi les fonctions continues vérifiant la propriété de la moyenne ou encore, pour celles à valeurs réelles, celles qui sont localement des parties réelles de fonctions holomorphes. Seront abordés, entre autres, les principes du maximum, les formules de Poisson, de Schwarz et de Jensen ainsi que le problème de Dirichlet.

Complément d'analyse complexe : il s'agit d'étudier les séries de fonctions méromorphes et les produits infinis. Ces notions sont nécessaires pour l'étude des fonctions fondamentales que sont les fonctions Gamma et Zêta.
La fonction Gamma d'Euler : définition par produit eulérien et par intégrale, formule de dédoublement de Legendre, formule de Stirling.
La fonction Zêta de Riemann : formule d'Euler pour Zêta, valeurs de Zêta sur $\mathbb{Z}$, équation fonctionnelle de Zêta, la bande critique.
Équations différentielles complexes : Éléments sur les fonctions holomorphes de plusieurs variables, problèmes de Cauchy holomorphes, équations différentielles générales, équations et fonctions de Bessel.
Si le temps le permet, l'un des thèmes suivant sera exposé : solutions élémentaires du Laplacien, transcendance différentielle de Gamma ou le théorème des nombres premiers.

MU 4MA 010 Probabilités de base (12 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Laurent Mazliak
mél : `laurent.mazliak@upmc.fr`
url : `https://perso.lpsm.paris/~mazliak/mazliak.html`

Objectifs de l'UE : Proposé sous la forme de Cours-TD, ce module est destiné aux étudiants n'ayant pas suivi de cours de probabilités en L3. Il présente les concepts fondamentaux de la théorie moderne des probabilités fondée sur la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue dont les résultats principaux seront rappelés. Le choix de ce module, dont le programme est similaire à celui inclus dans le tronc commun de l'agrégation, est particuliérement indiqué pour les étudiants ayant l'intention de préparer le concours sans choisir l'option A (probabilités et statistiques).

Prérequis : Cours d'intégration de L3 (des rappels seront proposés).

Thèmes abordés : Espaces de probabilités, variables et vecteurs aléatoires, lois et moments. Indépendance. Convergence de variables aléatoires, loi des grands nombres. Fonction caractéristique et théorème de la limite centrale. Espérance conditionnelle. Vecteurs gaussiens.

MU 4MA 011 Probabilités approfondies (12 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Thierry Lévy
mél : `thierry.levy@sorbonne-universite.fr`
url : `https://www.lpsm.paris/users/levyt/index`

Objectifs de l'UE : Le cours commencera par une étude détaillée de la notion d'espérance conditionnelle, puis présentera les deux principaux modèles de suites de variables aléatoires dépendantes, à savoir les martingales et les chaînes de Markov (à espace d'états dénombrable). Ces notions sont centrales aussi bien d'un point de vue théorique que pour les applications : les chaînes de Markov sont au cœur des techniques de simulation aléatoire et les martingales à temps discret formalisent de nombreux phénomènes et jouent un rôle essentiel dans l'étude des systèmes dynamiques aléatoires.
Ce cours prépare à un M2 en probabilités et statistiques et/ou à l'agrégation de mathématique.

Prérequis : Un cours de théorie de la mesure et d'intégration assez général, et un cours de probabilités de niveau L3 incluant les notions suivantes : indépendance, convergence presque sûre, en probabilité, L^p, loi des grands nombres, convergence en loi et théorème central limite.

Thèmes abordés : Espérance conditionnelle. Martingales à temps discret : filtrations, temps d'arrêt, convergences, théorèmes d'arrêt, uniforme intégrabilité, martingales rétrogrades. Chaînes de Markov à espace d'états dénombrable : propriété de Markov faible et forte, récurrence et transience, mesures invariantes, théorème ergodique, périodicité, convergence vers la loi stationnaire.

MU 4MA 014 Groupes et représentations (6ECTS) (1e semestre)

Professeur : Alexis Bouthier
mél : alexis.bouthier@sorbonne-universite.fr

Objectifs de l'UE : Ce cours s'adresse non seulement aux mathématiciens mais aussi aux physiciens et aux chimistes. Il traite des groupes, de leurs actions et de leurs représentations linéaires en s'appuyant sur de nombreux exemples. Il donne l'occasion d'appliquer à des problèmes concrets de nombreux outils d'algèbre générale.

Prérequis : Définitions de base sur les groupes, anneaux et corps (en particulier les corps $\mathbb{F}_p$). Arithmétique élémentaires (relation de Bézout, lemme de Gauß…). Algèbre linéaire : bases de la théorie (espaces vectoriels, familles libres et génératrices, bases, dimension, valeurs propres), un peu de réduction d'endomorphismes (diagonalisabilité…) et formes hermitiennes.

Thèmes abordés : Opérations d'un groupe sur un ensemble. Produits semi-directs. Le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ et quelques sous-groupes importants. Groupes libres et présentation. Théorèmes de Sylow. Groupes résolubles et groupes nilpotents. Représentations linéaires : généralités (simplicité et semi-simplicité), avec une insistance sur les représentations complexes en dimension finie. Théorie des caractères.

Remarque : Ce cours sera enseigné pendant la première moitié du premier semestre, jusqu'à mi-octobre. La date exacte sera indiquée sur l'emploi du temps.

MU 4MA 015 Statistique (12 ECTS) (1er semestre)

Professeurs : Arnaud Guyader, Anna Ben-Hamou
mél : arnaud.guyader@sorbonne-universite.fr
anna.ben-hamou@upmc.fr
url : https://perso.lpsm.paris/~aguyader/
http://www.lpsm.paris/dw/doku.php?id=users:benhamou:index

Objectifs de l'UE : Donner aux étudiants quelques fondements de statistique mathématique. La première partie du cours explique les bases théoriques de la modélisation et de l'inférence statistique dans un cadre fréquentiste. La seconde présente l'approche bayésienne.

Prérequis : Une bonne connaissance des probabilités classiques est indispensable, ainsi qu'une grande maîtrise des acquis du L (algèbre linéaire, calcul intégral, etc.).

Thèmes abordés :

— Introduction aux problèmes statistiques (brefs rappels de probabilités, notion d'expérience statistique, problèmes statistiques classiques)
— Modèles paramétriques unidimensionnels (méthode des moments, maximum de vraisemblance, information de Fisher)
— Le modèle linéaire gaussien (modele linéaire général, estimateurs des moindres carrés, régions de confiance et tests)
— L'approche bayesienne (loi a priori, loi a posteriori)
— Bayésien et théorie de la decision (estimateurs de Bayes, estimateurs minimax, minoration de Le Cam, tests bayesiens)
— Convergence de lois a posteriori (consistance de la loi a posteriori, theorème de Bernstein–von Mises)
— Simulations de lois a posteriori

MU 4MA 016 Structures de données et algorithmes pour la programmation (6 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Didier Smets
mél : `didier.smets@sorbonne-universite.fr`

Objectifs de l'UE : Le cours vise à introduire des outils et méthodes qui sont essentiels à la plupart des formes de programmation, et en particulier celles pour lesquelles un accent est porté sur la performance. Cela se traduit par la description de **structures de données**, contraintes par l'architecture des ordinateurs et l'adressage de leur mémoire, et qui permettent de donner vie à des concepts mathématiques au-delà des seules opérations arithmétiques. Associés à ces structures de données, nous décrirons des **algorithmes** qui ont fait preuve de leur efficacité, tant par leur complexité théorique que leur adéquation à résoudre des problèmes concrets et la possibilité d'une implémentation efficace sur les architectures existentes. L'implémentation dans un langage étant une excellente manière d'appréhender ces concepts (mais aussi les éventuelles difficultés associées), ils seront tous accompagnés, en cours et en travaux pratiques, par une implémentation détaillée et commentée en langage C/C++. De ce fait, ce module est aussi un cours de programmation C/C++.

Remarque : This course is also part of EUMaster4HPC and will be taught in English.

MU 4MA 020 Théorie de Galois (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Jean-François Dat
mél : `jean-francois.dat@imj-prg.fr`
url : https://webusers.imj-prg.fr/~jean-francois.dat/

Objectifs de l'UE : présenter la théorie générale des extensions de corps et l'alternative algébrique/transcendant, puis prouver les principaux théorèmes de la théorie de Galois des extensions finies, et en donner quelques applications telles que : la caractérisation des polynômes résolubles "par radicaux", les propriétés des nombres complexes constructibles à la règle et au compas, ou la loi de réciprocité quadratique.

Prérequis : Il est nécessaire d'avoir suivi le cours "Algébre commutative" du S1 ou d'en connaitre le contenu, et il est fortement conseillé de connaître la théorie des groupes de niveau L3 (groupes abéliens finis, groupes symétriques, produits semi-directs).

Thèmes abordés : Extensions de corps, transcendance et algébricité (Nullstellensatz si le temps le permet), normalité et (in)séparabilité, corps de décomposition d'un polynôme, groupe de Galois d'un polynôme, résolubilité par radicaux, techniques de calcul d'un groupe de Galois, exemples et applications.

MU 4MA 022 Géométrie différentielle (12 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Jean-Baptiste Teyssier

Objectifs de l'UE : Introduire les notions de base de géométrie différentielle à travers des exemples.

Prérequis : Connaissances en topologie, calcul différentiel et calcul intégral du niveau Licence.

Thèmes abordés : Rappels de topologie générale et calcul différentiel.

La notion de variété différentielle. Immersions, submersions, difféomorphismes. Exemples.

Calcul différentiel dans les variétés.

Partitions de l'unité. Plongements dans l'espace euclidien.

Champs de vecteurs, crochet de Lie, flots. Construction de difféomorphismes.

Formes différentielles, intégration, théorème de Stokes, cohomologie de De Rham. Applications topologiques.

MU 4MA 024 Groupes et algèbres de Lie (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Elisha Falbel

mél : `elisha.falbel@imj-prg.fr`

url : `https://webusers.imj-prg.fr/~elisha.falbel/`

Objectifs de l'UE : Ce cours combine l'algèbre et l'analyse pour étudier la structure des groupes de matrices réelles ou complexes.

Prérequis : Notions de base d'algèbre linéaire, de théorie des groupes, et de géométrie différentielle.

Thèmes abordés : Groupes topologiques et groupes de Lie. Application exponentielle. Algèbres de Lie. Théorèmes de structure des algèbres de Lie. Représentations linéaires des groupes et algèbres de Lie. Application aux groupes SO(3), SU(2), SL(2).

MU 4MA 025 Analyse fonctionnelle approfondie et calcul des variations (12 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Hervé Le Dret

mél : `herve.le_dret@sorbonne-universite.fr`

url : `https://www.ljll.math.upmc.fr/~ledret/`

Objectifs de l'UE : Le cours vise à présenter les connaissances nécessaires pour aborder des problèmes de calcul de variations, sujet qui peut approximativement se résumer à l'optimisation dans des espaces de dimension infinie ; ceci nous amènera à faire un détour conséquent vers quelques aspects de l'analyse fonctionnelle (d'une part à travers des notions abstraites et générales, et d'autres part via l'étude de certains espaces fonctionnels importants pour les applications). Les outils seront illustrés sur des problèmes “classiques” du calcul des variations. Le cours pourra intéresser à la fois des étudiants souhaitant se tourner vers des M2 de recherche, d'ingénierie, ou qui souhaitent préparer l'agrégation (en effet même si le contenu dépassera assez largement le programme de l'agrégation sur certains points, du fait de la nature assez ‘transverse' du cours sur des sujets variés de l'analyse, de nombreux éléments comme l'étude des espaces fonctionnels, de la compacité, de la complétude, des applications linéaires continues, de problèmes d'extremum, de la convexité, ou encore des formulations variationnelles d'EDP, pourront tout à fait être rentabilisés pour la préparation aux écrits, et surtout aux oraux d'analyse de l'agrégation). Le poly 2021-2022 est accessible sur la page web indiquée plus haut. Les mises à jour ultérieures seront mises à disposition sur le site Moodle du cours.

Prérequis : Le cours est essentiellement auto-contenu. Même si de nombreuses interactions pourront être remarquées avec les cours 4MA005 (Bases d'analyse fonctionnelle) et 4MA006 (Bases des méthodes numériques), il n'est nécessaire d'avoir suivi ni l'un ni l'autre de ces cours. À l'inverse, les redites avec les cours mentionnés seront gardées à un minimum. Il est toutefois fortement conseillé d'avoir des connaissances solides sur la topologie au niveau L3 (cadre des espaces métriques) et quelques connaissances sur la théorie de la mesure et l'intégration (cas de la mesure de Lebesgue, théorèmes de convergence, théorèmes de régularité des intégrales à paramètre...).

Thèmes abordés :

— Compacité, semi-continuité inférieure et minimisation dans un espace métrique.
— Étude d'espaces fonctionnels : espace des fonctions continues (avec notamment la question de la compacité), espaces de Lebesgue (avec notamment les théorèmes de densité), espaces de Sobolev (en dimension 1),
— Analyse fonctionnelle abstraite : étude de la dualité, des théorèmes de Hahn-Banach, des convergences faibles,
— Application aux formulations faibles des EDP elliptiques linéaires avec conditions aux limites (en dimension 1),
— Calcul différentiel en dimension infinie, conditions d'optimalité d'Euler-Lagrange, introduction aux EDP non-linéaires (en dimension 1).

MU 4MA 026 Approximation des EDPs elliptiques et problèmes d'évolution (12 ECTS) (2e semestre)

Professeurs : Nathalie Ayi, Xavier Claeys
mél : `claeys@ann.jussieu.fr`
`nathalie.ayi@sorbonne-universite.fr`

Objectifs de l'UE : Ce cours porte sur l'analyse des équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires. Il se découpe en deux parties et partage sa première partie avec le cours *EDPs elliptiques et simulation numérique* avec lequel il est jumelé.

La première partie, traite des équations de type elliptique pour lesquelles nous aborderons la théorie variationnelle permettant d'étudier l'existence, l'unicité et la régularité des solutions. Nous présenterons également en détail la méthode des éléments finis, qui permet la résolution numérique des EDP elliptiques, et nous étudierons d'un point de vue théorique la stabilité et la consistance de cette méthode.

Dans une deuxième partie, le cours portera sur les EDP d'évolution (i.e. faisant intervenir des dérivées partielles par rapport au temps) pour lesquelles nous développerons d'abord une analyse abstraite permettant d'étudier l'existence te l'unicité des solutions. Nous décrirons et analyserons ensuite des méthodes numériques de résolution de ces EDPs.

Prérequis : Notions de base d'analyse réelle, d'algèbre linéaire, et de calcul différentiel et intégral.

Thèmes abordés : Rappels de calcul différentiel. Préliminaires d'analyse : espaces de Hilbert, espaces de Sobolev. Injections de Sobolev. Théorème de trace. Intégration par parties. Inégalités de Poincaré et de Bramble-Hilbert.

EDP elliptiques : Conditions au bord type Dirichlet, Neumann, et Robin. Solutions faibles et fortes. Formulations variationnelles. Théorème de Lax Milgram. Existence, unicité et stabilité de la solution exacte. Approximation par éléments finis : lemme de Céa, problème variationnel discret et système linéaire équivalent, estimation d'erreur.

EDP d'évolution (équation de transport, équation de la chaleur, équation des ondes) : Conditions au bord et conditions initiales. Existence, unicité et stabilité de la solution exacte. Approximation numérique : définition des schémas d'approximation bien posés, erreur de consistence, stabilité, estimation d'erreur.

MU 4MA 028 Équations d'évolution, stabilité et contrôle (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Hoai-Minh Nguyen

mél : hoai-minh.nguyen@sorbonne-universite.fr

Objectifs de l'UE : On s'intéresse aux systèmes dynamiques décrits par une équation différentielle en dimension finie. On regarde d'abord le problème de Cauchy (solution partant d'un point donné). Étudier la stabilité d'un point d'équilibre de tels systèmes consiste à étudier la convergence des solutions cet un état d'équilibre. De telles études reposent sur les théorèmes de Lyapunov ou le principe d'invariance de LaSalle, dont on donnera de nombreux exemples d'applications à la fois académiques ou tirés de différents domaines : physique, biologie, ...

Par ailleurs ce cours traitera de la théorie mathématique des systèmes de contrôle. Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir grâce à ce qu'on appelle le contrôle. Par exemple, dans une voiture, on peut tourner le volant, appuyer sur la pédale d'accélérateur, etc. Pour un satellite, des propulseurs ou des roues d'inertie peuvent être utilisés.

L'un des principaux problèmes dans la théorie du contrôle est le problème de la stabilisation. On peut le comprendre avec l'expérience classique du balai que l'on fait tenir sur le bout du doigt. En principe, si le balai est vertical avec une vitesse nulle, il doit rester à la verticale (avec une vitesse nulle). Comme on le voit expérimentalement, ce n'est pas le cas en pratique : si nous ne faisons rien, le balai va tomber. C'est parce que l'équilibre est instable. Afin d'éviter la chute, on déplace le doigt de manière appropriée afin de stabiliser cet équilibre instable. Ce mouvement du doigt est une rétroaction (feedback) : elle dépend de la position (et de la vitesse) du balai. Les lois de rétroaction sont maintenant utilisées dans de nombreuses industries et même dans la vie quotidienne (robinets thermostatiques par exemple). On donne des méthodes et des théorèmes pour traiter ce problème.

Prérequis : Cours de calcul différentiel de L3.

Thèmes abordés :

Première partie : stabilité des équations différentielles

– Équations différentielles, théorème de Cauchy-Lipschitz, solutions maximales, théorèmes pour l'existence globale de solutions.

– Stabilité des points d'équilibre : cas des systèmes linéaires, caractérisations spectrales, fonctions de Lyapunov, théorèmes de Lyapunov (directe et inverse) et de LaSalle. Exemples dans diverses disciplines.

Deuxième partie : théorie du contrôle

– Stabilisation des systèmes (théorème du placement de pôles pour les systèmes linéaires, application aux systèmes non linéaires, stabilité par amortissement, fonction de Lyapunov contrôlée).

– Stabilité et stabilisation uniforme de systèmes linéaires dependant du temps (exposant maximal de Lyapunov, lemme de Fenichel, normes extremales et normes de Barabanov).

Ouvrages conseillés :

Jean-Michel Coron, Control and nonlinearity, AMS, disponible à l'adresse
https://www.ljll.math.upmc.fr/~coron/Documents/Coron-book.pdf

MU 4MA 029 Approximation des EDPs elliptiques et simulation numérique (12 ECTS) (2e semestre)

Professeurs : Nathalie Ayi, Xavier Claeys

mél : `claeys@ann.jussieu.fr`
`nathalie.ayi@sorbonne-universite.fr`

Objectifs de l'UE : Ce cours porte sur l'analyse des équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires. Il se découpe en deux parties et partage sa première partie avec le cours *EDPs elliptiques et problèmes d'évolution* avec lequel il est jumelé.

La première partie, traite des équations de type elliptique pour lesquelles nous aborderons la théorie variationnelle permettant d'étudier l'existence, l'unicité et la régularité des solutions. Nous présenterons également en détail la méthode des éléments finis, qui permet la résolution numérique des EDP elliptiques, et nous étudierons d'un point de vue théorique la stabilité et la consistance de cette méthode.

La deuxième partie portera sur la mise en oeuvre effective de la méthode des éléments finis du point de vue de la programmation et de l'algorithmique. Le cours s'appuiera sur un nombre accru de séances de TPs de programmation en `python`.

Prérequis : Notions de base d'analyse réelle, d'algèbre linéaire, et de calcul différentiel et intégral.

Thèmes abordés : Rappels de calcul différentiel. Préliminaires d'analyse : espaces de Hilbert, espaces de Sobolev. Injections de Sobolev. Théorème de trace. Intégration par parties. Inégalités de Poincaré et de Bramble-Hilbert.

EDP elliptiques : Conditions au bord type Dirichlet, Neumann, et Robin. Solutions faibles et fortes. Formulations variationnelles. Théorème de Lax Milgram. Existence, unicité et stabilité de la solution exacte. Approximation par éléments finis : lemme de Céa, problème variationnel discret et système linéaire équivalent, estimation d'erreur.

Principe d'assemblage des matrices éléments finis, calcul des intégrales élémentaires par formules de quadrature, méthode de pseudo-élimination, visualisation des solutions numériques, debuggage et validation d'un code élément fini, algorithmique pratique sur les maillages.

MU 4MA 030 Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz (12 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Frédéric Klopp
mél : `frederic.klopp@imj-prg.fr`
url : http://www.imj-prg.fr/~frederic.klopp/enseignement.html

Objectifs de l'UE : Le but de ce cours est de permettre l'acquisition de bases solides en analyse réelle, en analyse harmonique et dans la théorie des distributions de Schwartz. Les techniques développées seront à appliquées à l'étude de problèmes classiques d'analyse et de certaines équations aux dérivées partielles.

Prérequis : Calcul différentiel et intégral de licence.

Thèmes abordés : Mesures de Borel positives, théorème de représentation de Riesz, espaces L^p. Mesures complexes, différentiation de mesures (fonction maximale, inégalité maximale de Hardy–Littlewood, théorème de Lebesgue–Radon–Nicodym, points de Lebesgue), le dual de $\mathcal{C}_0(X)$. Série de Fourier de fonctions et de mesures, séries trigonométriques (convergence dans des espaces fonctionnels, convergence ponctuelle), noyau de Poisson, extension harmonique, fonction harmonique conjuguée. Fonctions test et distributions. Distributions à support compact Produits tensoriels et convolution de distributions. Distributions tempérées et leur transformée de Fourier. Quelques solutions fondamentales.

MU 4MA 033 Théorie des nombres 1 (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Leonardo Zapponi
mél : `Leonardo.zapponi@imj-prg.fr`
url : https://webusers.imj-prg.fr/~leonardo.zapponi/Web2/index.html

Objectifs de l'UE : Ce cours propose une approche à la théorie des nombres. Son objectif est de fournir les premières bases algébriques et de présenter des résultats classiques, adoptant comme fil conducteur l'équation de Pell-Fermat. Il prépare également le terrain pour des cours plus avancés de M1 (Théorie des nombres 2, Cryptologie, cryptographie algébrique) et de M2 (plus particulièrement pour le parcours agrégatif).

Prérequis : notions d'algèbre de niveau licence, qui seront par ailleurs rappelées en début de cours : bases de la théorie des groupes, de tla héorie des anneaux et d'algèbre linéaire.

Table des matières :

1. **Une introduction au fil de l'histoire**.

2. **Rudiments d'approximation diophantienne**. La mesure d'irrationalité d'un réel. Approximation, algébricité et transcendance. L'équation de Pell-Fermat.
3. **Extensions de corps**. Extensions finies, algébriques et transcendantes. Norme, trace et polynôme caractéristique. Corps quadratiques. Corps finis.
4. **La loi de réciprocité quadratique**. Les symboles de Legendre et de Jacobi. La loi de réciprocité quadratique. Caractères de Dirichlet.
5. **Divisibilité et factorisation**. Factorisation et idéaux. Anneaux de Dedekind. L'anneau des entiers d'un corps quadratique. Groupe des classes. Unités.

MU 4MA 034 Théorie des nombres 2 (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Javier Fresán
mél : `javier.fresan@polytechnique.edu`
url : http://javier.fresan.perso.math.cnrs.fr

Objectifs de l'UE : Le cours va donner les résultats fondamentaux de la théorie algébrique et analytique des nombres classique. Les étudiants ayant suivi le module seront préparés à aborder un M2 parcours agrégation, ou des cours plus abstraits dans le domaine en année de M2.

Prérequis : Les connaissances requises pour suivre ce cours sont celles du niveau L, à savoir, les notions de groupe, anneaux et corps, ainsi qu'un peu d'analyse complexe et des concepts standards de convergence et continuité. Les notions abordées dans le cours de Théorie des Nombres 4MA033 seront également supposées connues.

Thèmes abordés :

— Équation de Pell-Fermat et autres équations diophantiennes.
— Géométrie des nombres (théorème de Minkowski).
— Formes quadratiques binaires et anneaux quadratiques.
— Sommes de Gauss.
— Extensions algébriques, entiers algébriques, discriminants.
— Corps de nombres, finitude du nombre de classes, théorème des unités de Dirichlet.
— Anneaux de Dedekind, décomposition des idéaux, ramification.
— Corps cyclotomiques.
— Caractéres de groupes abéliens finis.
— Séries de Dirichlet et application au théorème de la progression arithmétique.
—Formule des classes de Dirichlet et applications : on verra notamment pourquoi, lorsque $p \equiv 3 \bmod 4$, il y a toujours plus de carrés modulo p que de non-carrés entre 1 et $\frac{p-1}{2}$.

MU 4MA 035 Cryptologie, Cryptographie algébrique (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Leonardo Zapponi
mél : `Leonardo.zapponi@imj-prg.fr`
url : https://webusers.imj-prg.fr/~leonardo.zapponi/Web2/index.html

Objectifs de l'UE : Décrire certains protocoles de la cryptographie à clé publique. Exposer les problèmes de primalité et de factorisation des entiers. Présenter une introduction à la théorie des courbes elliptiques afin d'en décrire des applications à la cryptographie.

Prérequis : Connaissances en algèbre et arithmétique du niveau Licence, ainsi que la loi de réciprocité quadratique exposée dans le premier cours de M1 de théorie des nombres.

Thèmes abordés : Cryptosystèmes à clés publiques, tests et critères de primalité, méthodes de factorisation, introduction à la théorie des courbes elliptiques, courbes elliptiques sur les corps finis, cryptosystèmes elliptiques, critère de primalité de Goldwasser et Kilian, méthode de factorisation de Lenstra.

Bibliographie : À titre indicatif, je signale les trois ouvrages suivants en complément du cours :

1. M. Demazure, Cours d'algèbre, primalité divisibilité codes, Nouvelle bibliothèque mathématique, Cassini (1997).
2. N. Koblitz, A Course in Number Theory and Cryptography, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer **114** (1994).
3. L. C. Washington, Elliptic Curves, Number Theory and Cryptography, Second Edition, Discrete Mathematics and its Applications, CRC Press (2008).

MU 4MA 036 Processus de sauts (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Nicolas Fournier
mél : `nicolas.fournier@sorbonne-universite.fr`
url : http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/fournier/

Objectifs de l'UE : Les processus markoviens de sauts sont les processus à temps continu les plus simples. Ils représentent cependant des outils de modélisation pertinents dans de nombreuses situations (comme en files d'attente). Par ailleurs, une bonne compréhension de ces processus est probablement nécessaire avant d'aborder les processus de diffusion en M2. Le but de ce cours est donc une étude rigoureuse des processus markoviens de sauts ainsi que de certaines de leurs applications.

Prérequis : Un cours de probabilités (il n'est pas nécessaire d'avoir suivi un cours sur les chaînes de Markov ou sur les martingales pour suivre ce cours).

Thèmes abordés : Chaînes de Markov, Processus de Poisson, Processus markoviens de sauts, Files d'attente et autres applications.

MU 4MA 039 Histoire d'un objet mathématique (6 ECTS) (2e semestre)

Professeurs : Alexandre Guilbaud et Laurent Mazliak
mél : `laurent.mazliak@sorbonne-universite.fr`
url : http://www.proba.jussieu.fr/users/lma/M1HistMaths.html

Objectifs de l'UE : Ce module veut être une initiation à l'histoire des mathématiques en tant que discipline vivante. On s'y intéressera à différents aspects de l'analyse infinitésimale à travers une présentation qui combinera cours magistraux sur des points d'histoire du calcul différentiel et de l'intégration entre l'Antiquité et le 20ème siècle et analyse de textes originaux de mathématiciens ayant travaillé sur ces sujets. En plus d'acquérir des connaissances factuelles sur l'histoire de la discipline, chaque semaine les étudiants se confronteront donc par exemple à des écrits de

Descartes, Fermat, Newton, D'Alembert, Lagrange, Cauchy, Riemann, Lebesgue et bien d'autres, et pourront de ce fait comprendre comment les mathématiques enseignées aujourd'hui sont le produit d'un long processus de découverte, construction et réécriture. Cette approche est intéressante en soi mais elle permet souvent aussi, en revenant à la source des questionnements, de saisir pourquoi des concepts fondamentaux des mathématiques ont été élaborés. Une telle approche doit donc permettre de prendre du recul sur les mathématiques en général, sur l'articulation entre les différentes branches qui les composent, leurs dynamiques passées et actuelles ainsi que leurs interactions avec d'autres champs du savoir.

MU 4MA 043 Introduction à la géométrie algébrique effective (6 ECTS) (2e semestre)

Professeurs : Antonin Guilloux et Fabrice Rouillier
mél : antonin.guilloux@upmc.fr, Fabrice.Rouillier@inria.fr

Objectifs de l'UE : Ce cours présente des objets calculables utiles à la description effectives de variétés algébriques. Nous revisiterons les notions nécessaires sur les anneaux de polynômes et les variétés algébriques. Ensuite nous présenterons des méthodes à la fois formelles et numériques pour décrire ces derniéres. Nous nous concentrerons sur le cas des variétés de dimension 0 (c'est-à-dire un nombre fini de points), déjà trés riche.

Ce cours ouvre à une deuxiéme année de Master de Mathématiques Fondamentales, ou des parcours autour de l'Algébre Appliquée. Certaines des notions présentées sont aussi présentes dans le cours ÂńMéthodes algébriques effectivesÂż.

Prérequis : Connaissances générales en algébre de niveau L3.

Thèmes abordés :

1. **Rappels d'algébre commutative**
Anneaux de polynômes, Anneaux noetheriens, anneaux quotients, anneaux locaux, produit tensoriel. Action de groupes finis sur les polynômes multivariés.
2. **Éléments sur les variétés algébriques**
Ensembles algébriques, ensembles constructibles, dictionnaire Idéal-Variété, théorème des zéros de Hilbert et théorème de Bézout.
3. **Problémes univariés**
Résultant univarié, sous-résultant, discriminant, suite de Sturm, régle de Descartes. Relations coefficients-racines.
4. **Élimination - Projection - Résolution**
Résultant multivarié, Définition et propriété des bases de Gröbner, Résolution de systémes algébriques en dimension 0 : réduction au cas univarié et/ou à des problémes de valeurs propres.
5. **Approximations numériques certifiées**
Localisation et multiplicités de zéros réels ou complexes d'un polynôme. Approximation de racines et valeurs propres. Algorithme de Newton et ses généralisations.

MU 4MA 045 Travail d'étude et de recherche - TER (6 ECTS) (2e semestre)

Responsable : Frédéric Klopp
mél : frederic.klopp@imj-prg.fr
url : http://master.math.sorbonne-universite.fr/fr/niveau_m1/travaux_d_etude_et_de_recherche_ter_stages.html

Objectifs de l'UE : Le TER de la première année de Master Mathématiques consiste en un travail d'étude et de recherche effectué sous la direction d'un enseignant qui propose le sujet. Il peut s'effectuer en binôme. Ce travail pourra être théorique ou/et comporter une partie de simulation numérique. Il pourra également être réalisé autour d'une question émanant d'un partenaire industriel ; le sujet est alors proposé conjointement par ce partenaire et l'enseignant responsable du TER. Le stage de TER est généralement effectué au second semestre.

Évaluation l'UE : Le TER donne lieu à un rapport écrit et à une soutenance orale (d'environ 30 minutes), qui constituent l'évaluation du travail. La soutenance devra avoir eu lieu au plus tard deux semaines avant le jury du second semestre. La validation du TER permet l'attribution de 6 ECTS dans le cadre du second semestre du M1.

Déroulement de l'UE : Un T.E.R. dure au moins quatre mois ; pour qu'il soit soutenu avant les jurys de juin, il doit donc être débuté au plus tard à la fin janvier.

L'inscription en T.E.R. est subordonnée au choix d'un sujet, à l'obtention de l'accord de l'enseignant-chercheur responsable du sujet ainsi que de l'accord du responsable des T.E.R. Certains sujets proposés en début d'année universitaire sont rassemblés dans un fascicule disponible auprés de l'enseignant responsable. L'étudiant intéressé par un sujet rencontre l'enseignant-chercheur qui le propose. Un étudiant intéressé par un domaine particulier peut aussi aller voir un enseignant-chercheur de son choix afin de lui proposer de le diriger lors d'un T.E.R. ; le sujet peut alors être défini d'un commun accord.
Dans tous les cas, l'étudiant confirme son choix auprès du responsable des T.E.R. qui coordonne le processus. Le cas échéant, le responsable des T.E.R. donne son accord. Une fois le sujet choisi et, le cas échéant, le binôme constitué, les étudiants rencontrent régulièrement l'enseignant responsable du sujet qui les guidera dans leur travail.

NB :
- Le TER n'est pas ouvert aux étudiants inscrits en FOAD.
- Pour s'inscrire dans ce module, il est nécessaire d'avoir validé le premier semestre du M1.

MU 4MA 048 Systèmes dynamiques (6ECTS) (2e semestre)

Professeur : Yves Coudène

mél : `yves.coudene@upmc.fr`

Objectifs de l'UE : Ce cours a pour objet de présenter quelques concepts fondamentaux de systèmes dynamiques (conjugaison, orbites périodiques, récurrence, mesures invariantes, etc.) introduits à travers l'étude de nombreux exemples. Ce sera aussi l'occasion de revisiter de nombreuses notions du programme de licence en topologie, algèbre linéaire, calcul différentiel, analyse réelle, analyse complexe, etc. En particulier, il peut être intéressant de le suivre dans l'optique d'une préparation à l'agrégation.

Prérequis : Cours standard de topologie, calcul différentiel, algèbre linéaire, un peu de théorie de la mesure.

Thèmes abordés :

– Systèmes dynamiques en dimension 1 : période 3 implique chaos ; théorème de Sharkovski ; croissance des orbites périodiques, notion de mesure invariante, conjugaison. Exemple de l'application logistique.

– Dynamique linéaire : Exemple de la suite de Fibonacci. Classification des applications linéaires. Linéarisation au voisinage d'un point fixe hyperbolique.

– Equidistribution : Rotation du cercle, minimalité, équirépartition, notion de théorie ergodique.

– Equations différentielles, champs de vecteurs et flots : théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres ; portraits de phase des champs de vecteurs linéaires ; notions de conjugaison.

– Systèmes dynamiques en dimension deux : Flots planaire, application de premier retour, théorie de Poincaré-Bendixson dans le plan.

Eventuellement : systèmes dynamiques holomorphes, méthode de Newton, ensembles de Julia et de Mandelbrot.

MU 4MA 053 Calcul scientifique pour les grands systèmes linéaires (6 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Xavier Claeys, Mi-Song Dupuy

mel : `claeys@ann.jussieu.fr`
`mi-song.dupuy@sorbonne-universite.fr`

Objectifs de l'UE : Ce cours se tiendra dans la 2eme moitié du 1er semestre dans la continuité du cours 4M016 d'introduction à la programmation. Nous aborderons, sous l'angle de la programmation pratique, les méthodes de résolution classiques des systèmes linéaires de grande dimension, tels que ceux rencontrés lors de la résolution approchée d'équations au dérivée partielles. Ce cours s'appuiera sur le langage C++.

Prérequis : Bases solides en algèbre linéaire, et une première expérience en programmation.

Thèmes abordés : stockage des matrices creuses, méthodes de résolution directe (Gauss,LU), méthodes de résolution itératives stationnaires (Jacobi, Gauss-Seidel, gradient à pas optimal), principe général des méthodes de Krylov , méthode MinRes, gradient conjugué, méthode GMRes, décomposition en valeurs singulières, appel de bibliothèques avec C++ (BLAS, Lapack, UMFPACK).

Remarque : Ce cours donne lieu à un projet, qui est préparé par groupes d'un ou deux étudiants et est soutenu individuellement.

MU 4MA 055 Stage en entreprise pour mathématiciens (6 ECTS) (1er ou 2e semestre)

Professeur : Bruno Després
mél : bruno.despres@sorbonne-universite.fr
url : http://www.master.ufrmath.upmc.fr/fr/niveau_m1.html (onglet insertion professionnelle)

Objectifs de l'UE : Donner aux étudiants la possibilité d'avoir une expérience de l'utilisation des outils mathématiques et des logiciels scientifiques dans le milieu de l'entreprise ou de l'industrie. Préciser un projet professionnel en découvrant de façon concrète un domaine d'application lié aux mathématiques.

Prérequis : lire la description détaillée sur le site web http://www.master.ufrmath.upmc.fr/fr/niveau_m1.html (onglet insertion professionnelle) et prendre contact avec le professeur responsable de l'UE avant d'établir la convention de stage.

Thèmes abordés : L'étudiant trouve son stage seul. Le sujet est proposé par l'entreprise et doit être validé par le responsable de l'UE avant le début du stage. Le stage doit comprendre une immersion totale dans l'entreprise pendant 2 mois minimum, soit pendant l'été soit pendant un semestre universitaire si l'étudiant a déjà validé les autres modules, dans le cas d'un M1 étalé sur plus d'un an. Les stages ayant lieu pendant l'été seront évalués à la rentrée de septembre. D'autres situations particulières peuvent être étudiées au cas par cas. Les stages validés au titre d'un autre diplôme ne peuvent pas être pris en compte. L'évaluation du stage repose sur trois critères : la rédaction d'un rapport, la soutenance orale et l'avis motivé du responsable en entreprise.

Tous les étudiants voulant faire un stage en entreprise pendant l'année de M1, dans le cadre de cette UE ou non, doivent remplir un formulaire en ligne http://www.master.ufrmath.upmc.fr/fr/niveau_m1.html (onglet insertion professionnelle) pour pouvoir ensuite obtenir une convention de stage.

MU 4MA 056 Programmation en C++ (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Damien Simon
mél : damien.simon@sorbonne-universite.fr
url : http://www.normalesup.org/~dsimon/enseignement/cplusplus/

Objectifs de l'UE :

La plupart des bibliothéques de calcul numérique, pour Python, R ou Tensorflow, sont écrites en C++ afin d'assurer une vitesse de calcul maximale, nécessaire dans de nombreuses applications (du machine learning à la discrétisation d'EDP en passant par les méthodes Monte-Carlo). Ce langage fortement typé, compilé et non interprété, permet une gestion fine de la mémoire et sa bibliothéque standard trés compléte propose la plupart des algorithmes élémentaires codés trés efficacement.

Ce cours donne les bases du langage de programmation C++ (standard C++11 et ultérieurs) avec une orientation vers les probabilités, les statistiques et les structures de données (mais pas seulement !) et est donc un trés bon complément à Python pour ceux qui se destinent au développement et à l'écriture de bibliothéques de calcul numérique intensif. Si le temps le permet, nous aborderons également l'interfaçage avec Python et les bases du calcul parallèle.

Ce cours n'a pas de TD et est composé d'un cours magistral (2h par semaine) et de TP sur machine (3h par semaine).

Prérequis : Notions d'algorithmique (tests logiques, boucles, fonctions)

Thèmes abordés : syntaxe, compilation avec g++, classes, programmation générique, exploration de la bibliothéque standard, simulations numériques, algorithmes classiques.

MU 4MA 057 Analyse convexe (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Jean-Pierre Marco
mél : jean-pierre.marco@imj-prg.fr
url : https://webusers.imj-prg.fr/~jean-pierre.marco/

Objectifs de l'UE : L'analyse convexe apparaît depuis les années 1970 (au moins) comme l'un des piliers des mathématiques dites "appliquées". Elle intervient en particulier dans la modélisation et la résolution numérique de problèmes dans pratiquement tous les secteurs où la modélisation mathématique est pertinente. Plus récemment, les propriétés de convexité ont joué un rôle central dans certaines branches des mathématiques dites "pures", par exemple le calcul des variations, les systèmes dynamiques et l'analyse fonctionnelle.

L'objectif de ce cours est d'introduire les fondements de l'analyse convexe, de montrer quelques-unes de ses applications pour les méthodes algorithmiques et les systémes dynamiques.

Prérequis : Algèbre linéaire, topologie élémentaire, calcul différentiel élémentaire.

Thèmes abordés :
- Rappels sur les espaces affines, euclidiens et le calcul matriciel
- Ensembles convexes, propriétés algébriques et topologiques
- Fonctions convexes, propriétés algébriques et topologiques
- Calcul différentiel pour les fonctions convexes
- Conjugaison de Legendre-Fenchel
- Vers des applications "pratiques" et "théoriques"
  - Quelques problèmes et algorithmes d'optimisation (linéaire-nonlinéaire)
  - Quelques applications au calcul des variations (théorie KAM faible)

MU 4MA 059 Topologie algébrique (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Jean-Baptiste Teyssier
mél : `jean-baptiste.teyssier@imj-prg.fr`
url : http://jbteyssier.com/

Objectifs de l'UE : Dans ce cours, nous introduirons la théorie des revêtements, en lien avec la notion d'homotopie. Nous définirons le groupe fondamental d'un espace topologique, et nous apprendrons à le calculer sur des exemples, notamment à l'aide du théorème de van Kampen.

Prérequis : Connaissances en topologie et calcul différentiel du niveau licence.

Thèmes abordés : Revêtements, homotopie, groupe fondamental.

MU 4MA 060 Introduction aux surfaces de Riemann (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Julien Marché
mél : `julien.marche@imj-prg.fr`
url : https://webusers.imj-prg.fr/~julien.marche/

Objectifs de l'UE : L'objectif de ce cours est de proposer une introduction aux divers aspects algébriques, analytiques et géométriques d'un des objets les plus riches et importants des mathématiques.

Prérequis : Analyse complexe élémentaire et les bases de la topologie algébrique.

Thèmes abordés : Surfaces de Riemann, courbes algébriques, diviseurs et fibrés en droites complexes, théorème de Riemann-Roch, géométrie hyperbolique et sous-groupes discrets.

MU 4MA 061 Modèles Mathématiques en Neurosciences (6 ECTS) (2e semestre)

Professeurs : Delphine Salort et Michèle Thieullen
mél : `delphine.salort@sorbonne-universite.fr`
`michele.thieullen@sorbonne-universite.fr`

Objectifs de l'UE : Introduire les modèles mathématiques développés dans les neurosciences et donner aux étudiants la formation en systèmes dynamiques déterministes ou stochastiques nécessaire à leur compréhension.

Prérequis : Sont souhaitables :
- un cours de niveau L3 de Probabilités (3M245 ou 3M290)
- un cours de Topologie et Calcul Différentiel (3M260)
- une initiation à la programmation pourra être utile

Thèmes abordés :
- Comment fonctionne un neurone. Notion d'excitabilité, de décharge. Génération et propagation du potentiel d'action.
- Modèle Intègre-et-Tire déterministes et stochastiques.
- Les modèles classiques : équations de Hodgkin-Huxley, de FitzHugh-Nagumo, de Morris-Lecar.
- Bruits Gaussiens et Poissoniens. Modélisation du fonctionnement des canaux ioniques par des processus de Markov.
- Introduction aux systèmes dynamiques. Points stationnaires, cycles limites et théorie des bifurcations.

- Systèmes dynamiques lents-rapides.
- Temps de décharge et problèmes d'estimation. Densité de probabilité et équations aux dérivées partielles.

MU 4MA 062 Systèmes dynamiques discrets et continus en biologie et médecine (6 ECTS) (1er semestre).

Professeur : Delphine Salort
mél : delphine.salort@sorbonne-universite.fr
url : http://www.lcqb.upmc.fr/users/salort

Objectifs de l'UE : L'objectif de ce cours est d'introduire les principaux outils de base mathématiques qui interviennent dans la conception et l'étude de nombreux modèles permettant de décrire des phénomènes issus de la biologie. Dans le cadre de ce cours, nous allons nous centrer sur des modèles dont la branche des mathématiques est principalement issue du domaine de l'analyse et des équations ordinaires et aux dérivées partielles. Ces outils sont très performants dans de nombreux cadres issues de la biologie, dont certains seront détaillés avec dans ce cours.

Prérequis : Ce cours s'adresse à des étudiants venant de divers horizons, le niveau de prérequis est donc assez bas, des exercices adaptés aux objectifs du cours permettront de combler les lacunes éventuelles.

Thèmes abordés : modèles de dynamique de population discrets et structurés : Algèbre linéaire, matrices, théorème de Perron Frobenius
modèles EDO d'ordre 1 en 1d et multi-d (compétition, écologie, proie prédateur...) : Calcul différentiel, portrait de phases, stabilité, dynamique asymptotique
approximation des EDO : différences finies
Analyse des EDP structurées
Bibliographie : Mathematical biology, J. Murray.

MU 4MA 065 Calcul stochastique et introduction au contrôle stochastique (12 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Idris Kharroubi
mél : idris.kharroubi@sorbonne-universite.fr
url : https://www.lpsm.paris//pageperso/kharroubii/

Objectifs de l'UE : Présenter des éléments de calculs stochastiques à temps discret et continus, avec application au contrôle markovien, au filtrage et à la finance.

Prérequis : Il est indispensable d'avoir les connaissances du cours de Probabilités Approfondies (espérance conditionnelle, chaînes de Markov, martingales)

Thèmes abordés :

Temps discret : calcul stochastique (applications à la valorisation d'action), contrôle stochastique (gestion de stock, gestion de portefeuille), arrêt optimal (problème du mariage, valorisation d'un stockage gazier), filtrage.

Temps continu : mouvement brownien, intégrale stochastique, formule d'Itô, formule de Feynman-Kac, contrôle de diffusions. Applications à la formule de Black et Scholes, à la gestion de portefeuille de Merton.

MU 4MA 066 Optimisation numérique et science des données (6 ECTS) (2e semestre)

Professeur : Emmanuel Trélat
mél : emmanuel.trelat@sorbonne-universite.fr
url : https://www.ljll.math.upmc.fr/trelat/

Objectifs de l'UE : Ce cours permet d'acquérir les outils mathématiques théoriques et pratiques de pointe en optimisation numérique et science des données. L'objectif est d'apprendre à modéliser et résoudre des problémes complexes d'optimisation, avec ou sans contraintes, et d'apprendre à mettre en œuvre divers algorithmes innovants efficaces pour l'approximation numérique des solutions.

Prérequis : Pas de prérequis particuliers.

Thèmes abordés : Dans ce cours, on apprendra les méthodes classiques d'optimisation : existence, conditions de premier et de second ordre, diverses variantes de méthodes de gradient, conditions de Karush-Kuhn-Tucker, dualité Lagrangienne, puis on fera une ouverture à la science des données : gradient stochatisque, gradient coordonnée par coordonnée, gradient non lisse, TensorFlow. Des TD et TP (Python) viendront compléter la formation, ainsi qu'une introduction aux méthodes les plus à la pointe : différentiation automatique (AMPL) couplée aux outils experts (IpOpt). Elles seront illustrées sur divers exemples, comme l'analyse d'image ou le machine learning.

MU 4MA 71 Modélisation Statistique (6 ECTS) (2ème semestre)

Professeur : Rafaël Pinot
mél : rafael.pinot@epfl.ch
url : https://rpinot.github.io/

Objectifs de l'UE : Initier à la pratique de l'analyse statistique des données réelles. Ce cours présente les outils classiques de la modélisation statistique mis en œuvre en TP avec le logiciel R. L'évaluation contient une partie de contrôle continu sur des TPs notés.

Prérequis : De bonnes connaissances de probabilités ainsi que des bases de programmation (peu importe le langage). Les TP commenceront par une initiation au langage R (environnement Rstudio et documents RMarkdown). Avoir déjà suivi un cours de statistique inférentielle et de tests statistiques est vivement conseillé.

Thèmes abordés :

— Statistique descriptive univariée et multivariée (résumés numériques et graphiques) et rappels de tests classiques

— Analyses factorielles : en composantes principales (ACP), factorielle des correspondances (AFC), des correspondances multiples (ACM), factorielle multiple (AFM)

— Modéle linéaire : présentation générale, régression, analyse de la variance (ANOVA), régression logistique

Objectifs de l'UE : Donner aux étudiants quelques outils de modélisation statistique mathématique et les initier à la pratique de l'analyse statistique des données réelles. Ce cours présente des modèles de régression et des méthodes pour l'analyse des données réelles, illustrés en TP avec le logiciel R. Les étudiants seront évalués sur un projet consistant en l'analyse d'un jeu de données réelles grâce aux outils vus en cours. Ce projet donnera lieu à la rédaction d'un rapport et d'une soutenance.

Prérequis : Des bonnes connaissances de probabilités ainsi que des bases de programmation (peu importe le langage). Les TP commenceront par une initiation à la programmation en R. Avoir déjà suivi un cours de statistique est vivement conseillé.

Thèmes abordés :
- Bref rappels de statistique mathématique : estimation, intervalles de confiance et tests d'hypothéses.
- Statistique descriptive (résumés numériques et graphiques de données, tests classiques)
- Le modèle linéaire gaussien (modele linéaire général, estimateurs des moindres carrés, régions de confiance)
- Le modèle linéaire en pratique (validation du modèle, sélection de variables)
- Analyse de la variance
- Introduction au modèle linéaire généralisé. Régression logistique.

MU 4MA 073 Statistique avancée : non paramétrique, grande dimension et données massives (6 ECTS) (2ème semestre)

Professeur : Étienne Roquain

mél : `etienne.roquain@sorbonne-universite.fr`

url : http://etienne.roquain.free.fr

Objectifs de l'UE : Ce cours a pour but d'introduire les outils nécessaires à l'analyse des données "modernes", assez massives et complexes. Les étudiants devront s'approprier les concepts évoqués en cours et TDs et seront évalués sur leur capacité à manipuler ces notions.

Prérequis : Ce cours est un cours de statistiques avancées, qui nécessite d'avoir validé un cours de statistique de contenu au moins équivalent à "Statistique de base" et un cours de probabilité de contenu au moins équivalent à "Probabilités de base".

Thèmes abordés : Les thèmes suivants seront notamment abordés :
- Statistique de base : rappels sur l'estimation, les tests et les régions de confiance ; estimateur minimax ; estimateur de Bayes ;
- Statistique non paramétrique : inférences pour la fonction de répartition ; test d'adéquation à une loi ; test du χ^2 ; régression non-paramétrique ; estimateur par moyennes locales ; classification supervisée ;
- Estimation en grande dimension : modèles de grande dimension ; estimateur par shrinkage ; phénomène de Stein ; estimateur par seuillage ; sparsité ; modèles à représentation sparse ;
- Tests en grande dimension : tests de détection ; tests multiples ; identification des gènes différentiellement exprimés.

MU 4MA 074 Probabilités numériques et Machine Learning (12 ECTS) (2ème semestre)

Professeur : Vincent Lemaire, Sylvain Le Corff

mél : vincent.lemaire@sorbonne-universite.fr
sylvain.lecorff@gmail.com
url : https://perso.lpsm.paris/~vlemaire/
https://sylvainlc.github.io/

Objectifs de l'UE : Présenter des méthodes numériques de probabilités et de statistiques. D'une part, on donnera des justifications théoriques pour les différents algorithmes, d'autre part, la mise en œuvre pratique sur machine des différentes méthodes est au cœur de ce cours (en python avec les modules : numpy, scipy, seaborn et scikit-learn).

Prérequis : Programmation en Python. Connaissances en probabilités et statistique.

Thèmes abordés :

Partie I : Probabilités numériques
- Simulation d'objets aléatoires
- Méthode de Monte Carlo
- Optimisation stochastique

Partie II : Simulation pour le machine learning
- Bootstrap (bootstrap simple, intervalles de confiance)
- Estimation des modèles à variables latentes (modèle de mélange, algorithme EM, échantillonneur de Gibbs).
- Méthodes variationnelles pour les modéles à données manquantes.
- Introduction à la simulation pour les séries temporelles partiellement observées (filtre de Kalman, méthodes de Monte Carlo séquentielles).

MU 4MA OIP Orientation et Insertion professionnelle (3 ECTS) (1er semestre)

Professeurs : Bruno Després
mel : bruno.despres@sorbonne-universite.fr

Objectifs de l'UE : L'objectif de l'UE est d'aider les étudiants à préciser leur projet professionnel, et de s'assurer qu'ils s'orientent de la manière optimale pour le réaliser. Les étudiants sont répartis par groupes encadré par un enseignant chercheur qui est en même temps leur *directeur d'étude* pour l'année entière.

UE obligatoire : Les étudiants suivant au moins un cours en présentiel au premier semestre doivent obligatoirement suivre cette UE ainsi qu'une UE de langue à 3 ECTS.

Organisation de l'UE : Les informations détaillées seront communiquées sur le site web
http://www.master.ufrmath.upmc.fr/fr/niveau_m1.html (onglet insertion professionnelle) et sur Moodle.

Chapitre 2

Master 2, Parcours Mathématiques fondamentales

2.1 Objectifs et descriptions

Le parcours *Mathématiques fondamentales* s'adresse aux étudiants titulaires d'un M1 de mathématiques ou d'un titre équivalent.

Un large spectre des mathématiques fondamentales est généralement couvert, avec des variations selon les années : théorie des nombres, géométrie algébrique, théorie de Lie, topologie, géométries analytique et différentielle, systèmes dynamiques, analyse fonctionnelle, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles, etc.

2.2 Débouchés professionnels

Le programme fournit une base solide aux futurs chercheurs et enseignants-chercheurs d'universités et centres de recherche, ainsi que pour les futurs enseignants. Certains étudiants continueront après le master un cursus de 3 ans d'études doctorales.

Une partie importante d'étudiants avec leurs diplômes du Master 2 pourront commencer ou avancer leurs carrières académiques ou dans le secteur des entreprises.

Notons que dans plusieurs grands pays comme l'Allemagne, le Royaume Uni ou les Etats-Unis, un master ou, mieux, une thèse de mathématiques est un gage suffisant de puissance et de créativité intellectuelles pour être recruté par une entreprise de haute technologie.

Les étudiants étrangers développeront des collaborations avec la France aussi bien en matière de recherche, d'enseignement que d'autres domaines. Certains d'eux travaillent déjà dans les universités ou les centres de recherche.

2.3 Organisation

Le cursus comprend des *cours*, une *UE d'ouverture* et un *mémoire*. Les étudiants sont libres de choisir les cours. Quatre cours seront exigés ainsi qu'un mémoire de recherche. Le mémoire, dirigé par un enseignant-chercheur, introduit les étudiants aux sujets de recherche en cours de développement. Les étudiants sont tous suivis, guidés et encadrés par les responsables et les enseignants-chercheurs.

2.4 Publics visés, prérequis

Les étudiants ayant un diplôme de Master 1 de Sorbonne Université ou l'équivalent auront les meilleures chances de réussite dans ce parcours. Nous visons également les élèves des grandes écoles, les futurs agrégés et bien sûr les étudiants étrangers.

Les étudiants en thèse et les chercheurs débutants profiteront de ce programme pour élargir leur champ de connaissances.

Un nombre important de cours seront proposés pour l'enseignement à distance visant les étudiants en situation familiale ou professionnelle particulière.

2.5 Description des UE

5MF45. Variétés algébriques (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Jean-François Dat

mel : jean-francois.dat@imj-prg.fr

url : https://webusers.imj-prg.fr/~jean-francois.dat/enseignement/enseignement.php

Objectifs de l'UE : La géométrie algébrique est, à l'origine, l'étude des ensembles de points d'un espace affine ou projectif définis par un système d'équations polynômiales. Lorsque ces équations sont à coefficients dans un corps algébriquement clos, le langage approprié est celui des variétés algébriques. Nous introduirons ce langage, la notion pertinente de dimension dans ce contexte, celle de régularité d'un point, d'espace tangent, etc. En guise d'exemples concrets, on classifiera les courbes projectives lisses et on prouvera le théorème d'intersection de Bézout de courbes projectives planes, qui sera utile pour le cours fondamental "Introduction à l'arithmétique des courbes elliptiques". Selon le temps, on expliquera comment adapter ce langage aux questions de rationnalité des solutions, lorsque le corps n'est plus algébriquement clos (mais supposé parfait).

Prérequis : Ce cours utilisera quelques boîtes noires d'algèbre commutative (localisation, anneaux réguliers, dimension). Le contenu sera grosso-modo celui du premier chapitre de Hartshorne.

Thèmes abordés :

— ensembles algébriques, topologie de Zariski, composantes irréductibles, sous-variétés
— variétés (affines, projectives, abstraites), exemples (coniques, hypersurfaces, éclatements)
— dimension, régularité, espace tangent
— courbes projectives lisses et corps de degré de transcendence 1
— intersection de courbes projectives planes

— questions de rationalité, variétés sur un corps fini et leur endomorphisme de Frobenius

5MF41. Surfaces de Riemann (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Elisha Falbel

mel : elisha.falbel@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : L'objectif de ce cours est de proposer une introduction aux divers aspects algébriques, analytiques et géométriques d'un des objets les plus riches et les plus importants des mathématiques, qui est la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine.

Prérequis : Analyse complexe de M1 et bases de topologie et de géométrie différentielle.

Thèmes abordés :

— Définition et exemples, courbes elliptiques, courbes algébriques, courbes associées aux fonctions holomorphes, théorème d'uniformisation de Riemann.

— Aspects topologiques, genre, formule de Riemann-Hurwitz.

— Fibrés en droites (et courbure), différentielles holomorphes et théorème de Riemann-Roch.

— Faisceaux, cohomologie de Dolbeaut.

5MF43. Introduction aux systèmes dynamiques (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Patrice Le Calvez

mel : patrice.le-calvez@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps. On suppose généralement que la loi d'évolution est déterministe et fixée. La donnée est alors une transformation d'un espace dans lui même, que l'on peut itérer (temps discret, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$), ou alors une équation différentielle, dont la solution est un flot (temps continu, $\mathbb{R}$). De nombreux exemples intéressants viennent de la physique (mécanique, notamment étude du système solaire, mécanique statistique, ...), mais aussi de l'informatique, la chimie, la biologie... L'évolution pour des temps longs est souvent compliquée, donc difficile (impossible en pratique !), à prédire de façon exacte ("chaos", "effet papillon"). Cependant, divers outils permettent de décrire cette évolution de façon qualitative, notamment probabiliste, pour des classes de dynamiques assez vastes pour inclure des modèles intéressants.

Nous introduirons dans ce cours les notions de base ainsi que les exemples classiques des systèmes dynamiques.

Prérequis : Topologie, théorie de la mesure, analyse réelle. Le cours d'Emmanuel Roy, introduction à la théorie ergodique, est conseillé, sans être strictement requis.

Thèmes abordés :

— Dynamique topologique

— Homéomorphismes du cercle (nombre de rotation, Théorie de Denjoy)

— Théorèmes ergodiques (Von Neuman, Birkhoff, Kingman)

— Entropie métrique

5MF51. Géométrie différentielle et Riemannienne (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Frederic Naud

mel : frederic.naud@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : Ce cours introductif traite des notions de base en géométrie diffÃľrentielle. AprÃĺs des rappels sur les champs de vecteurs, les formes différentielles et le théorème de Stokes, on abordera la théorie des fibrés vectoriels et des connections que l'on spécialisera ensuite au cas Riemannien pour y parler de géodésiques, de courbure etc...

Prérequis :

Thèmes abordés :

— Variétés différentielles : variétés, sous-variétés, espace tangent, champs de vecteurs, flots, théorème de Frobenius.
— Formes différentielles, orientation, Stokes.
— Fibrés vectoriels, connections, courbure. Exemples
— Métriques Riemanniennes, connection de Levi-Civita. Géodésiques, application exponentielle, Hopf-Rinow.
— Courbures : sectionnelle, Ricci. Espaces à Courbure constante. Classes de Chern, forme d'Euler et généralisations de Gauss-Bonnet.

5MF31. Introduction à l'analyse géométrique (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Olivier Biquard

mel : olivier.biquard@sorbonne-universite.fr

Objectifs de l'UE : L'analyse géométrique est au coeur des progrès en géométrie réelle et complexe sur les variétés dans les années récentes (par exemple, le flot de Ricci a permis la démontration de la conjecture de Poincaré). Le cours donnera une introduction à ces techniques.

Prérequis : Géométrie différentielle et riemannienne

Thèmes abordés :

— Analyse des opérateurs elliptiques
— Inégalités de Sobolev
— Formule de Bochner et applications
— Fonctions harmoniques
— Exemples de problèmes géométriques non linéaires

5MF13. Introduction aux formes modulaires (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Pierre Charollois

mel : pierre.charollois@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE :

Ce cours est une introduction aux formes modulaires classiques.

Ce sont des fonctions holomorphes qui satisfont une propriété d'invariance sous l'action par homographies d'un sous-groupe d'indice fini de SL(2,Z).

Elles ont des propriétés analytiques, géométriques, algébriques et arithmétiques remarquables.

Prérequis : Fonctions d'une variable complexe.

Thèmes abordés :
— Exemples classiques, liens avec les fonctions elliptiques.
— Formes modulaires sur SL(2,Z).
— Formes modulaires sur (certains) sous-groupes discrets de SL(2,R). Courbes modulaires.
— Opérateurs de Hecke, liens avec les fonctions L.
— Séries d'Eisenstein, méthode de Rankin-Selberg.
— Si le temps le permet : fonctions thêta, périodes, multiplication complexe, exemples de formes modulaires plus générales, réformulation en termes de la théorie de groupes.

5MF22. Schémas I : introduction à la théorie des schémas (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : François Loeser
mel : Francois.Loeser@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : Ce cours propose une introduction à la théorie des schémas. Introduite par Grothendieck il y a plus d'un demi-siècle, c'est actuellement le langage commun non seulement de la géométrie algébrique mais également de larges pans de la théorie des nombres et de la théorie des représentations.

Prérequis : Les bases de l'alg$\tilde{\text{A}}$Îbre commutative telles qu'exposées par example dans le polycopié d'A. Ducros https ://webusers.imj-prg.fr/ antoine.ducros/Cours-schemas.pdf

Thèmes abordés :
— Spectre d'un anneau commutatif
— La catégorie des schémas
— Faisceaux quasi-cohérents, morphismes affines, immersions fermées
— Schémas et morphismes projectifs
— Morphismes propres

5MF24. Introduction à l'arithmétique des courbes elliptiques (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Marco Maculan
mel : marco.maculan@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : Une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ est une courbe algébrique non-singulière que l'on peut obtenir comme lieu des zéros d'un polynôme homogène de degré 3 dans le plan projectif sur $\mathbb{Q}$. C'est en quelque sorte l'objet le plus simple de la géométrie arithmétique après les "quadriques". Les points complexes d'une courbe elliptique forment une surface de Riemann dont l'espace topologique sous-jacent est un tore, et donc en particulier un groupe. Le fait que cette loi de groupe soit algébrique et définie sur $\mathbb{Q}$ permet d'attacher des invariants arithmétiques très importants, à savoir la structure du groupe des points rationnels et l'action de Galois sur les points "de torsion". Le but de ce cours sera d'introduire ces notions afin de pouvoir énoncer deux conjectures majeures du 20ème siècle : celle de Birch et Swinnerton-Dyer, toujours ouverte, et celle dite "de modularité", célèbre pour impliquer le théorème de Fermat, et prouvée par Wiles, Taylor et coauteurs.

Prérequis : Cours "Surfaces de Riemann".

Thèmes abordés :
- Sur $\mathbb{C}$: tores de dimension 1, invariant modulaire, courbes (et formes) modulaires.
- Sur un corps quelconque. Courbes de genre 1, structure de groupe, équations, isogénies, points de torsions.
- Sur un corps fini, théorème de Hasse, fonction zeta.
- Sur $\mathbb{Q}$, théorème de Mordell-Weil, fonction L, conjectures célèbres.

5MF52. Topologie algébrique des variétés I (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Julien Marché
mel : julien.marche@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : L'homologie et la cohomologie sont des outils indispensables pour étudier les espaces topologiques. Souvent, ceux qui nous intéressent le plus sont des variétés différentiables pour les quelles on dispose de différents points de vue, ce qui rend l'étude à la fois complexe et féconde. On supposera connus les fondements de l'homologie mais on les passera en revue. L'objectif sera de comprendre la dualité de Poincaré, la théorie de l'intersection, avec quelques compléments.

Prérequis : Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de topologie algébrique de niveau M1. Il est aussi souhaitable d'avoir suivi au moins d'un des cours introductifs "Théorie de l'homologie" et "Géométrie différentielle et riemannienne".

Thèmes abordés :
- Rappels sur l'homologie et la cohomologie singulière.
- CW complexes, homologie cellulaire.
- Variétés, classe fondamentale.
- Cohomologie de De Rham, théorème de De Rham.
- Produits, dualité de Poincaré, intersection.

5MF42. Géométrie complexe et théorie de Hodge (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Benoît Stroh
mel : benoit.stroh@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : Dans un premier temps on présentera une introduction à la géométrie complexe, qui est une version géométrique globale (au sens de la géométrie différentielle) de la théorie des fonctions analytiques. On introduira ensuite des outils cohomologiques basés sur la théorie des faisceaux. Enfin, on étudiera en détail la théorie harmonique et ses conséquences pour les variétés Kähleriennes : le théorème de décomposition de Hodge, mais également les théorèmes de Lefschetz.

Prérequis : Cours introductifs recommandés : surfaces de Riemann et Géométrie différentielle et riemannienne.

Thèmes abordés :
- Structure complexes, hermitiennes et symplectiques.
- Fibrés vectoriels, métriques, variétés complexes et Kähleriennes
- Faisceaux, cohomologie de De Rham et de Dolbeault
- Théorie Harmonique et décomposition de Hodge
- Suite spectrale Hodge vers De Rham.
- Théorèmes de Lefschetz.

5MF04. ThÃľorie des groupes rÃľductifs et torseurs (9 ECTS) (2nd semestre)

Professeur : Alexis Bouthier

mel : alexis.bouthier@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : Le but de ce cours est d'apporter les bases de thÃľorie des groupes rÃľductifs qui ont ensuite des ramifications en thÃľorie gÃľomÃľtrique des reprÃľsentations, programme de Langlands gÃľomÃľtrique ou Ãľtude du champ des G-fibrÃľs sur une courbe. On commencera donc par des gÃľnÃľralitÃľs sur les schÃľmas en groupes affines et les torseurs. Cela sera l'occasion d'introduire la topologie Ãľtale et fpqc ainsi que d'Ãľtablir des rÃľsultats de base d'annulation et de classification des G-torseurs. On passera ensuite Ãă l'Ãľtude spÃľcifique des groupes rÃľductifs sur un corps algÃľbriquement clos et des familles de groupes qui leurs sont reliÃľes. On terminera enfin par l'Ãľtude de la variÃľtÃľ de drapeaux et la construction gÃľomÃľtrique des reprÃľsentations irrÃľductibles en termes de cohomologie cohÃľrente.

Prérequis : SchÃľmas I, Cohomologie des faisceaux cohÃľrents. Au moins Lie I peut Ãłtre utile pour une premiÃĺre familiarisation avec la thÃľorie correspondante au niveau des algÃĺbres de Lie.

Thèmes abordés :
— schÃľmas en groupes affines
— torseurs
— groupes diagonalisables, rÃľsolubles, unipotents
— quotients
— groupes rÃľductifs, systÃĺmes de racines
— variÃľtÃľ de drapeaux et reprÃľsentations de plus haut poids

5MF73. SystÃĺmes dynamiques II (9 ECTS) (2nd semestre)

Professeur : Yves Coudène

mel : yves.coudene@sorbonne-universite.fr

Objectifs de l'UE : Ce cours, qui constitue la suite du cours Systèmes Dynamiques I du premier semestre, sera principalement consacré à l'étude des systèmes dynamiques uniformément hyperboliques. Ceux-ci forment une large classe de systèmes qui sont à la fois "chaotiques" et stables.

Nous introduirons les exemples fondamentaux (doublement de l'angle, fer à cheval de Smale, automorphismes linéaires hyperboliques du tore, flot géodésique en courbure négative) et les principaux outils pour leur étude (théorème de la variété stable, théorème de stabilité, partitions de Markov, sous-décalages).

Ceci nous permettra d'étudier les systèmes concernés sous de nombreux points de vue : géométrique (dessin des variétés stables et instables), combinatoires (codage comme sous-décalages), ergodiques (mesures de Markov, mesure d'entropie maximale), etc.

Prérequis : Le cours introductif de systèmes dynamiques et le cours de systèmes dynamiques I sont conseillés. On peut aussi lire la partie II de la première référence indiquée ci-dessous.

Thèmes abordés :

— Orbites périodiques hyperboliques. Ensembles invariants hyperboliques.
— Théorème de la variété stable
— Théorème de stabilité
— Partitions de Markov et codage
— Exemples : doublement de l'angle, fer à cheval de Smale, automorphismes d'Anosov, flot géodésique en courbure négative

5MF90. Topologie algébrique des variétés II : classes caractéristiques (9 ECTS) (2nd semestre)

Professeur : Ilia Itenberg

mel : ilia.itenberg@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : Le cours poursuit l'étude de la topologie des variétés différentiables, commencée dans le cours "Topologie algébrique des variétés I". Il peut être considéré comme introduction à la théorie des classes caractéristiques, un sujet qui se situe à l'interface de la topologie algébrique et de la géométrie.

Prérequis : Cours fondamental I "Topologie algébrique des variétés I".

Thèmes abordés :
— Fibrés vectoriels et notion de classe caractéristique.
— Classes de Stiefel-Whitney pour les fibrés vectoriels réels.
— Classes de Chern pour les fibrés vectoriels complexes.
— Classes de Pontryagin. Cobordismes et cobordismes orientés.

5MF33. Introduction à la théorie de Teichmüller (9 ECTS) (2nd semestre)

Professeur : Bram Petri

mel : bpetri@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : L'espace de Teichmüller d'une surface S est l'espace de déformations de structures complexes sur S. Il peut aussi être interprété comme un espace de métriques Riemanniennes à courbure constante sur S. L'espace de Teichmüller et son quotient l'espace de modules de surfaces de Riemann, jouent un rôle important dans plusieurs domaines de mathématiques. Le but de ce cours sera d'étudier la géométrie et la topologie de ces espaces. Le cours est aussi préparatoire pour le cours spécialisé "Panorama of geometry and dynamics of moduli spaces".

Prérequis : Nécessaires : Algèbre linéaire, analyse (complexe), topologie. Utiles : Surfaces de Riemann, géométrie différentielle

Thèmes abordés :
— Espace de Teichmüller, espace de modules de surfaces de Riemann
— Géométrie hyperbolique, décompositions en pantalons, coordonnées Fenchel-Nielsen
— Métrique de Teichmüller, théorème de Teichmüller
— Géométrie Weil-Petersson

5MF34. Géométrie des espaces globalement symétriques (9 ECTS) (2nd semestre)

Professeur : Andrés Sambarino

mel : andres.sambarino@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : Les espaces symétriques sont des variétés riemanniennes vérifiant une condition de symétrie supplémentaire : pour tout point de l'espace l'involution géodésique est une isométrie locale. Partant de cette définition assez élémentaire Élie Cartan, inspiré par des idées de Killing, classifie les espaces symétriques complets simplement connexes (aussi dits globalement symétriques). Le but du cours est d'expliquer des notions de basse sur la géométrie de ces espaces ainsi que sur leur classification, liant l'étude géométrique de ses espaces à l'étude des groupes de Lie semi-simples.

Les thèmes traités seront la décomposition de Cartan, la dualité entre type compact et type non-compact, le Théorème de Weyl sur le revêtement universel d'un groupe de Lie compact, puis on se centrera sur les espaces de type non-compact pour étudier leur structure à l'infini : bord visuel, bord de Furstenberg, etc.

Si le temps le permet on esquissera la classification des espaces globalement symétriques.

Ce cours est un prérequis naturel du cours "Sous-groupes discrets des groupes de Lie".

Prérequis : Notions de basse de géométrie riemannienne et des groupes de Lie

Thèmes abordés :

- Etude du groupe d'isométries et décomposition de Cartan des espaces globalement symétriques
- Théorème de Weyl sur le revetement universel des groupes compactes
- Dualité entre type compacte et type non-compacte
- Plongement totalement géodésiques
- Classification

5MF30. Déformations des variétés algébriques et théorie de Hodge (9 ECTS) (2nd semestre)

Professeur : Claire Voisin
mel : claire.voisin@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : La théorie de Hodge est un outil extraordinairement puissant pour l'étude des variétés algébriques complexes, particulièrement dans le cas projectif lisse où elle fournit des structures de Hodge attachées à ces variétés. Ces structures de Hodge contiennent des informations très riches dont la partie discrète vient de la topologie et la partie continue vient de la géométrie algébrique. Cette partie continue est liée à la théorie des déformations des variétés algébriques, et son étude donne lieu à la théorie des variations de structures de Hodge. Mon but est de présenter les applications à la géométrie algébrique des variations de structures de Hodge. Plus précisément, j'aimerais expliquer les démonstrations des trois théorèmes suivants.

(1) Théorème de Torelli générique pour les courbes et les hypersurfaces.

(2) Théorème de Bogomolov-Tian-Todorov suivant la méthode de Ran.

(3) Conjecture de Hodge entière pour les variétés de Calabi-Yau de dimension 3.

Prérequis : Introduction à la géométrie algébrique. Cohomologie des faisceaux.

Thèmes abordés :
- Complexes de de Rham algébrique et holomorphe. Suite spectrale de Frölicher.
- Structures de Hodge, classes de Hodge, classes de cycles, polarisations, théorèmes de Lefschetz.
- Complexes de de Rham relatifs. Fibrés de Hodge, variations de structures de Hodge.
- Théorie des déformations, espace tangent et obstructions. Le principe de relèvement T1
- Complexes de de Rham logarithmiques. Structures de Hodge mixtes, structures de Hodge des hypersurfaces
- Variations infinitésimales de structures de Hodge

5MF36. Dynamique des homéomorphismes du tore et graphe fin des courbes (9 ECTS) (2nd semestre)

Professeur : Frédéric Le Roux
mel : frederic.le-roux@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : L'objectif du cours est de servir d'introduction à la lecture d'un article récent de Bowden, Hensel, Mann, Militon et Webb, dont le résultat principal relie les deux objets suivants : - d'une part, l'ensemble de rotation d'un homéomorphisme tore, invariant dynamique qui généralise le nombre de rotation des homéomorphismes du cercle, - d'autre part, l'action d'un homéomorphisme du tore sur le graphe fin des courbes, qui est un graphe hyperbolique au sens de Gromov.

Prérequis : Il vaut mieux avoir une idée de la construction des nombres de rotation sur le cercle, des notions élémentaires de théorie ergodique et de dynamique hyperbolique. Les trois cours précédents dans le parcours systèmes dynamiques du M2 sont plus que suffisants.

Thèmes abordés :
- Ensemble de rotation
- Graphe hyperbolique au sens de Gromov
- Le graphe des courbes, homeomorphismes pseudo-Anosov
- Le graphe fin des courbes
- Action des homéomorphismes sur le graphe fin

5MF08. Fibrés stables sur les courbes et représentations unitaires du groupe fondamental (9 ECTS) (2nd semestre)

Professeur : François Loeser
mel : Francois.Loeser@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : L'objet de ce cours est de présenter une démonstration complète du théorème de Narasimhan-Seshadri (1965) établissant une correspondance bijective entre les fibrés stables sur une courbe complexe projective lisse et les représentations projectives unitaires irréductibles de son groupe fondamental. Pour cela nous serons amenés à construire l'espace des modules des fibrés semi-stables sur une courbe et à étudier ses propriétés.

Prérequis : Introduction aux schémas I et II

Thèmes abordés :
- Fibrés stables et semi-stables
- Schéma de Hilbert
- Théorie géométrique des invariants
- Construction de l'espace des modules des fibrés (semi-)stables. Irréductibilité, lissité, théorème de Langton
- Représentations unitaires du groupe fondamental et leur espaces de modules
- Preuve du théorème de Narasimhan-Seshadri

5MF35. Sous-groupes discrets des groupes de Lie (9 ECTS) (2nd semestre)

Professeur : Andrés Sambarino
mel : andres.sambarino@imj-prg.fr

5MF06. Site pro-Ãľtale des schÃľmas, d'aprÃĺs Bhatt-Scholze (9 ECTS) (2nd semestre)

Professeur : Benoit Stroh
mel : benoit.stroh@imj-prg.fr

Objectifs de l'UE : Ce cours constituera une introduction au site pro-Ãľtale et aux liens avec les mathÃľmatiques condensÃľes, en se focalisant sur le cas des schÃľmas.

Le site pro-Ãľtale permet de construire des faisceaux en groupes abÃľliens naturellement munis d'une topologie. De mÃłme, les groupes de cohomologie de ces faisceaux sont aussi munis d'une topologie. Il s'agit donc d'une construction qui trouve naturellement des applications variÃľes en gÃľomÃľtrie algÃľbrique, arithmÃľtique ou analytique.

Ce site existe dans divers contextes : pour les variÃľtÃľs rigides de Tate, pour les diamants et les perfectoÃŕdes, et pour les schÃľmas. C'est ce dernier cadre dans lequel nous nous placerons : il a l'avantage de minimiser les prÃľrequis tout en donnant un bon panorama gÃľnÃľral.

Nous verrons les liens avec les mathÃľmatiques condensÃľes puisque tout faisceau pro-Ãľtale dÃľfini naturellement par les opÃľrations fibre ou cohomologie des groupes abÃľliens condensÃľs.

Prérequis : Cours de SchÃľmas I et SchÃľmas II, bonne connaissance de l'algÃĺbre commutative de base.

Thèmes abordés :
- Rappels sur les morphismes Ãľtales, plats, non-ramifiÃľs
- Topologie de Grothendieck et sites
- Morphismes faiblement Ãľtales et ind-Ãľtales
- Site pro-Ãľtale
- SchÃľmas w-locaux et w-contractiles
- Lien avec les mathÃľmatiques condensÃľes

2.6 Responsables et site

Les responsables du parcours sont Ilia Itenberg et Benoît Stroh. Les informations complètes, régulièrement mises à jour, seront disponibles sur les pages web :

http://master-math-fonda.imj-prg.fr

Sécrétariat : Mme Laurence Dreyfuss
Campus de Jussieu
(premier étage, couloir 15-25, bureau 1.09)
4 place Jussieu, 75005 Paris

Tél & Fax : 01 44 27 85 45
Mél : laurence.dreyfuss@sorbonne-universite.fr

Chapitre 3

Master 2, Spécialité Probabilités et modèles aléatoires

3.1 Objectifs et descriptions

L'objectif de la spécialité "PROBABILITÉS ET MODELES ALEATOIRES" de la seconde année du Master de Sorbonne Université, est de délivrer une formation de haut niveau en probabilités théoriques et appliquées.

En 2023-24 nous proposons **deux orientations** aux étudiants en fonction des cours suivis et du sujet de mémoire ou de stage choisi : l'une plus centrée sur la
– *Théorie des Processus Stochastiques*,

l'autre sur les
– *Probabilités Appliquées.*

La première orientation prépare les étudiants à une carrière de chercheur (ou enseignant-chercheur) en milieu académique, l'autre à une carrière en milieu industriel, en passant par des stages et des thèses CIFRE.

3.2 Débouchés professionnels

L'objectif principal de cette spécialité est de préparer à une carrière de recherche dans les domaines des probabilités théoriques ou appliquées, de la statistique mathématique. Une bonne proportion des étudiants devrait s'orienter vers la préparation d'une thèse ; un autre débouché naturel est la professionnalisation en milieu industriel. Finalement le diplôme de ce master constitue un atout incontestable dans la carrière de professeurs agrégés en mathématiques.

3.3 Organisation

Cette formation se fait en co-habilitation l'École Normale Supérieure - Ulm et le CERMICS (Ecole des Ponts ParisTech).

Après un cours préliminaire de 2 semaines de remise à niveau, au **premier semestre** les étudiants qui ont choisi l'orientation "*Processus stochastiques*" suivent les cours

— "Processus de Markov et Applications" (9ECTS)
— "Calcul Stochastique et Processus de Diffusions"(9ECTS)
— "Convergence de Processus, Grandes Deviations, Percolation" (6ECTS)
— et un cours au choix parmi deux cours "Nuages Poissioniens, Processus de Levy et Excursions"(6 ECTS), ou "Statistique et Apprentissage"(6 ECTS).

Au **premier semestre** les étudiants qui ont choisi l'orientation "*Probabilités Appliquées*" suivent les cours

— "Modèles Markoviens sur des espaces discrets" (6ECTS),
— "Calcul Stochastique et Processus de Diffusions"(9ECTS),
— "Probabilités Numériques et Méthodes de Monte Carlo" (9ECTS),
— "Statistique et Apprentissage"(6 ECTS).

Il possible aussi de remplacer le dernier cours de chaque orientation par le cours EDP et Alea du parcours M2 mathématisues de la Modélisation.

Ces cours du premier semestre présentent les aspects fondamentaux du domaine ; ils forment la base sur laquelle s'appuient les cours spécialisés. Au 2ème semestre les étudiants choisissent les cours spécialisés dans la liste suivante :

— "Probabilités, Algèbre et Théorie Ergodique"(6ECTS),
— "Probabilités et Physique"(6ECTS),
— "Probabilités, Méthodes Numériques et Algorithmes"(6ECTS),
— "Processus Stochastiques et Satistiques II"(6ECTS),
— "Géométrie et Graphes aléatoires"(6ECTS),
— "Probabilités, Biologie et Neurosciences"(6 ECTS),
— "Probabilités et Analyse"(6 ECTS).

Ces cours présentent plusieurs domaines à la pointe de la recherche en Probabilités Théoriques et Appliquées. Le contenu de chacun des cours de cette année est décrit dans la brochure.

Les cours du second semestre conduisent les étudiants à une première confrontation avec la recherche sous la forme d'un mémoire ou d'un stage. **Le mémoire** consiste en général en la lecture approfondie d'un ou plusieurs articles de recherches récents, sous la direction d'un membre du Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires ou d'un enseignant de la spécialité. Il doit être redigé en Latex et soutenu devant un jury.

Le mémoire peut-être remplacé par un rapport de stage. **Le stage** s'effectue dans un organisme de recherche ou un bureau d'études, sous la direction conjointe d'un ingénieur de l'organisme d'accueil et d'un enseignant de la spécialité.

La travail de mémoire ou de stage de courte durée (moins de 3 mois) est accredité de 12ECTS, les étudiants doivent le compléter par la validation de trois cours optionnels au choix pour valider 30 ECTS de second semestre.

Le travail de stage industriel de longue durée (à partir de 3 mois) est accredité de 18ECTS, les étudiants le complètent par la validation de deux cours optionnels pour valider 30 ECTS au second semestre.

3.4 Publics visés, prérequis

Cette spécialité s'adresse à des types très variés d'étudiants, en fonction de l'orientation choisie : l'orientation vers la *théorie des processus stochastiques* est plutôt destinée à des étudiants ayant une très bonne formation mathématique se dirigeant vers la recherche académique. L'orientation vers les *Probabilités appliquées* est aussi destinée pour étudiants plus intéressés par les applications en milieu industriel. Elle est très largement ouverte aux élèves ayant une formation plus générale de type ingénieur. Accessoirement, elle approfondit et complète la formation de professeurs agregés en classes préparatoires.

3.5 Description des UE

UE préliminaires

5MA00 Espérance conditionnelle et martingales (0 ECTS) (cours préliminaire intensif de deux semaines au 1er semestre)

Professeur : Anne-Laure Basdevant

mel : Anne-Laure.Basdevant@sorbonne-universite.fr

url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/basdevant/

Objectifs de l'UE : Compléter et consolider un prérequis de connaissances en Calcul de Probabilités indispensable pour suivre les cours du Master.

Prérequis : Cours de théorie de la mesure et d'intégration, cours de Probabilités de Base.

Thèmes abordés : Rappels de théorie de la mesure et de l'intégration, de différents modes de convergence en Calcul de Probabilités. Espérance conditionnelle, martingales à temps discret.

UE fondamentales, l'orientation "Processus Stochastiques"

5MA03 Processus de Markov et Applications (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Thomas Duquesne

mel : Thomas.Duquesne@sorbonne-universite.fr

url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/duquesne/

Objectifs de l'UE : Apprendre la théorie des processus de Markov, des exemples et des techniques de base indispensables pour leur analyse.

Prérequis : Cours de théorie de la mesure et d'intégration, cours de Probabilités de Base, espérance conditionnelle, martingales à temps discret.

Thèmes abordés : Chaines de Markov, récurrence et transience, mesure invariante. Processus de saut pur, phénomène d'explosion. Processus de Markov, générateur infinitésimal, résolvante. Propriété de Markov forte. Problème de martingales. Equations de Kolmogorov. Processus de diffusions, leurs générateurs, les liens avec les EDP. Applications en mécanique statistique et en analyse de files d'attente et de réseaux. Applications en biologie : en génétique et dynamique de populations.

5MA02 Calcul Stochastique et Processus de Diffusion (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Nicolas Fournier

mel : Nicolas.Fournier@sorbonne-universite.fr

url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/fournier/

Objectifs de l'UE : Donner les connaissances indispensables sur l'intégrale stochastique et les équations différentielles stochastiques.

Prérequis : Cours de théorie de la mesure et d'intégration, cours de Probabilités de Base, espérance conditionnelle, martingales à temps discret.

Thèmes abordés : Le mouvement brownien, la continuité de ses trajectoires, la propriété de Markov (forte), l'intégration stochastique par rapport à une martingale de carré intégrable, la formule d'Ito, le théorème de Girsanov, les équations différentielles stochastiques (EDS) et leurs solutions faibles ou fortes (dites diffusions), les liens avec les équations aux dériveès partielles, la formule d'Ito-Tanaka, le temps local du mouvement brownien, les EDS réfléchies EDS à coefficients non-lipschitziens, processus de Bessel.

5MA01 Convergence de processus, Grandes Déviations, Percolation (6 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Thierry Levy

mel : Thierry.Levy@sorbonne-universite.fr

url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/levy/

Objectifs de l'UE : Ce cours consiste en trois chapitres largement indépendants dont le point commun est d'explorer des interactions entre la théorie des probabilités et la topologie ou la géométrie.

Prérequis : Une connaissance de la théorie de la mesure et de lâĂŹintégration, et des bases de la théorie des probabilités ; un contact avec la topologie des espaces métriques, et avec de l'analyse fonctionnelle.

Thèmes abordés : Convergence des processus : Espaces polonais, Espace des mesures sur un espace polonais, Tension, Théorème de Prokhorov, Théorème de Donsker, Convergence fonctionnelle des processus continus, critère de Kolmogorov. Grandes déviations : Entropie relative de deux mesures, Théorème de Sanov, Transformation de Legendre, Théorème de Cramér. Percolation : Notion de transition de phase, Ergodicité, Inégalité FKG, Phases sous- et sur-critique, Théorème de Kesten.

5MA04 Nuages Poissoniens, processus de Levy, excursions (6 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Thomas Duquesne

mel : Thomas.Duquesne@sorbonne-universite.fr

url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/duquesne/

Objectifs de l'UE : Approfondir le cours "Processus de Markov et Applications".

Prérequis : Cours de base "Processus de Markov et Applications", "Calcul Stochastique et Processus de Diffusions", "Thórèmes Limites pour les processus stochastiques".

Thèmes abordés : Les processus de Lévy, les processus de branchement, les mesures ponctuelles de Poisson, la théorie des excursions, des applications aux processus de Lévy.

UE fondamentales, l'orientation "Probabilités Appliquées."

5MA14 Probabilités Numériques et Méthodes de Monté Carlo (9 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Gilles Pages, Vincent Lemaire
mel : Gilles.Pages@upmc.fr, Vincent.Lemaire@upmc.fr
url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/pages/
url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/lemaire/

Objectifs de l'UE : Présenter les méthodes de Monte-Carlo et de Quasi-Monte-Carlo d'usage courant et les illustrer sur de nombreux exemples (calculs de prix de couverture et autres).

Prérequis : Cours de théorie de la mesure et d'intégration, cours de Probabilités de Base.

Thèmes abordés : 1. Génération de variables aléatoires suivant les lois usuelles. 2.Méthode de Monte-Carlo : calcul d'espérance par simulation. 3.Méthodes de réduction de variance : variables de contrôle, échantillonnage préférentiel, variables antithétiques, stratification, conditionnement. 4.Quasi-Monte-Carlo : techniques de suites à discrépances faibles. 5.Méthodes de gradient stochastique et de Bootstrap. 6.Discrétisation en temps des équations différentielles stochastiques (schéma d'Euler, de Milshtein) : application au pricing d'options européennes. 7.Amélioration de la méthode dans le cas d'options path-dependent : ponts browniens et autres. 8.Calcul des couvertures et sensibilités par méthode de Monte-Carlo.

Une mise-en-oeuvre informatique des techniques abordés sera effectuée lors des séances de TD. Chaque étudiant devra réaliser, en binôme, un projet informatique (en langage C) implémentant soit des calculs de prix et de couvertures d'options soit des simulations d'autres modèles. Il remettra un rapport décrivant les méthodes utilisées et commentant les résultats obtenus.

5MA02 Calcul Stochastique et Processus de Diffusion (9 ECTS) (1er semestre)

Voir plus haut.

5MM32 Modèles Markoviens sur des espaces discrets (6ECTS) (1er semetre)

Professeur : Thomas Duquesne
mel : Thomas.Duquesne@sorbonne-universite.fr
url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/duquesne/

Objectifs de l'UE : Présenter la théorie des processus de Markov sur des espaces discrets, des exemples et les techniques indispensables pour leur analyse.

Prérequis : Cours de théorie de la mesure et d'intégration, cours de Probabilités de Base, espérance conditionnelle, martingales à temps discret.

Thèmes abordés : Chaines de Markov, récurrence et transience, mesure invariante. Processus de Markov de saut pur, équations de Kolmogorov, mesure invariente, phénomène d'explosion, théorèmes limites. Applications en mécanique statistique et en analyse de files d'attente et de réseaux. Applications en biologie : en génétique et en dynamique de populations.

5MA06 Statistique et Apprentissage (6 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Irina Kourkova

mel : Irina.Kourkova@sorbonne-universite.fr

url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/kourkova/

Objectifs de l'UE : Donner aux étudiants les bases fondamentales du raisonnement et de la modélisation statistique, tout en présentant une ouverture vers des thématiques de recherche contemporaines. L'accent sera particulièrement mis sur l'utilisation pratique des nouveaux objets rencontrés.

Prérequis : Une bonne connaissance du calcul des probabilités et de l'algèbre linéaire.

Thèmes abordés : Rappels de probabilités, estimation ponctuelle, estimation par intervalles, tests. Modèle linéaire : estimation, intervalles de confiance et tests. Introduction à l'apprentissage statistique et à la classification supervisée. Minimisation du risque empirique, théorème de Vapnik-Chervonenkis. Règles de décision non paramétriques (méthode des k plus proches voisins et arbres de décision). Quantification et classification non supervisée.

UE optionnelles, 2ème semestre.

5MA07 Probabilités, Algèbre et Théorie ergodique. (6 ECTS) (2ème semestre)

Professeurs : Philippe Biane, Romain Dujardin, Giambattista Giacomin, Anna Erschler

mel : biane@univ-mlv.fr, erschler@ens.fr

mel : Romain.Dujardin@upmc.fr

mel : giacomin@lpsm.paris

url : http://monge.univ-mlv.fr/~biane

url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/giacomin/

url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/dujardin/

url : https://www.ens.fr/~erschler

Objectifs de l'UE : Introduire les étudiants aux sujets de recherche d'actualité qui portent sur les matrices aléatoires et la théorie ergodique.

Prérequis : Les cours fondamentaux du premier semestre.

Thèmes abordés : Représentations de groupes symétriques, leur comportement asymptotique, théorie de matrices aléatoires, mesure de Plancherel, convolution libre de mesures. Mesure de Yang-Mills sur les surfaces compactes, sa limite lorsque le rang du goupe de structure tend vers l'infini, mouvement Brownien sur les groupes de Lie compacts, théorie de jauge. Introduction à la théorie ergodique, mélange, théorèmes de Von Neumann, Birkhoff, Kingman, cocycles linéaires, exposant de Lyapounov et théorème d'Osseledets. Produits de matrices aléatoires liés aux modèles desordonnés de la mécanique statistique. Equation de Schrödinger avec protentiels aléatoires. Fonctions harmoniques et bords de marches aléatoires

5MA08 Probabilités et Physique. (6 ECTS) (2ème semestre)

Professeurs : Laure Dumaz, Quentin Berger, Cedric Boutillier, Titus Lupu, Cristina Toninelli

mel : Cedric.Boutillier@sorbonne-univeriste.fr
mel : Titus.Lupu@sorbonne-universite.fr
mel : Quentin.Berger@sorbonne-universite.fr
mel : Toninelli@ceremade.dauphine.fr
url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/boutillier/
url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/lupu/
url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/berger/
url : https://www.ceremade.dauphine.fr/~toninelli/

Objectifs de l'UE : Introduire les étudiants dans les domaines de recherche d'actualité en Calcul de Probabilités en lien avec la Phyisque.

Prérequis : Les trois cours fondamentaux du 1er semestre.

Thèmes abordés : Surfaces et polymères desordonnés, leurs transitions de phase. Mécanique Statistique Critique en dimension 2 et invariance conforme. La percolation par site sur le réseau hexagonal, la pavage par dominos. Introduction en analyse de processus SLE. Systèmes de particules en interaction de la mécanique statistique.

5MA09 Probabilités, Méthodes Numériques et Algorithmes (6 ECTS) (2ème semestre)

Professeurs : Vincent Lemaire, Benjamin Jourdain, Pierre Monmarché

mel : Vincent.Lemaire@upmc.fr, Benjamin.Jourdain@enpc.fr, Pierre.Monmarché@sorbonne-universite.
url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/lemaire/
url : http://cermics.enpc.fr/~jourdain/
url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/monmarche

Objectifs de l'UE : Introduire les étudiants à la recherche dans les domaines de méthodes numériques probabilistes, de méthodes particulaires, d'algorithmes stochastiques.

Prérequis : Les cours fondamentaux du premier semestre.

Thèmes abordés : Arrêt optimal en temps continu. Enveloppe de Snell. Formulations duales. Etude analytique du prix de l'option américaine dans le cadre du modèle de Black-Scholes. Méthodes numériques de valorisation et de couverture pour les options américaiens *via* des approximations bermudéennes. Estimation de la volatilité d'une semi-martingale, problématique des sauts. Algorithm de Hasting-Metropolis , ses rafinements et applications. Algorithmes particulaires génétiques. Relaxation à l'equilibre en temps long pour des processus de Markov à temps et espace continu, fonctions de Lyapounov, méthodes de couplage, inégalités fonctionnelles, métastabilité à basse température, interaction champ moyen, processus non-reversibles, cynétiques, hypocoercivité.

5MA10 Pocessus stochastiques et statistiques II (6 ECTS) (2ème semestre)

Professeurs : Anna Ben-Hamou, Ismael Castillo, Yueyun Hu, Justin Salez

mel : Ismael.Castillo@upmc.fr, Anna.Ben-Hamou@sorbonne-universite.fr
mel : Justin.Salez@dauphine.psl.eu
mel : yueyun@math.univ-paris13.fr
url :https://www.ceremade.dauphine.fr/~salez/
url : https://www.math.univ-paris13.fr/~yueyun/
url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/castillo/
url : https://www.lpsm.paris/users/abenhamou/index

Objectifs de l'UE : Maitriser des outils stochastiques et statistiques avancés.

Prérequis : Les cours fondamentaux du premier semestre.

Thèmes abordés : Modèles non-paramétriques en statistiques, construction d'une loi a priori à l'aide de processus Gaussiens, processus de Dirichlet, cascades multiplicatives, étude de lois a posteiori corréspondantes. Construction et optimisation d'un modèle haute fréquence. Inégalités de concentration, leur application en physique, informatique, biologie et autres domaines. Temps de mélange de Chaines de Markov, phénomène de "cutoff" dans leur convergence vers la mesure stationnaire, marches aléatoires sur les réseaux, algorithmes d'exploration d'internet et d'hiérarchisation de pages web. Etudes de marches aléatoires avec branchement.

5MA11 Géométrie et Graphes Aléatoires (6 ECTS) (2ème semestre)

Professeurs : Bartek Blaszczyszyn, Nicolas Broutin, Jean-Francois Delmas, Pierre-Andre Zitt

mel : Bartek.Blaszczyszyn@ens.fr, delmas@cermics.enpc.fr
mel : Nicolas.Broutin@upmc.fr, pierre-andre.zitt@univ-eiffel.fr
url : http://www.di.ens.fr/~blaszczy/
url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/broutin/
url : https://lama.u-pem.fr/membres/zitt.pierre_andre
url : https://cermics.enpc.fr/~delmas/

Objectifs de l'UE : Introduire les étudiants à le recherche dans le domaine de géométrie aléatoire sous ses différents aspects.

Prérequis : Les cours fondamentaux du premier semestre.

Thèmes abordés : Processus ponctuels et graphes aléatoires. Mesures de Palm et mosaique de Voronoi. Graphes aléaoires d'Erdos-Renyi, modèles épidémiques, modélisation de réseaux sociaux. Modèle Booleén de la géomètrie stochastique, la percolation. Les fluctuations autour du comportement limite reliées le spectre des grandes matrices aléatoires et au champ libre gaussien sans masse, des propriétés d'invariance conforme dans la limite d'échelle. Les modèles sur des réseaux bipartis périodiques du plan, des mesures de Gibbs ergodiques. Limites d'échelles de graphes aléatoires, problémes de leur universalité. La théorie des Grands graphes denses.

5MA12 Probabilités, Biologie et Neurosciences (6 ECTS) (2ème semestre)

Professeurs : Michele Thieullen, Gregory Nuel, Philippe Robert

mel : michele.thieullen@upmc.fr, gregory.nuel@upmc.fr
mel : philippe.robert@inria.fr
url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/thieullen/

url : https://www.lpsm.paris/laboratoire/annuaire/nuel/
url : https://www.inria.fr/annuaire/robert/

Objectifs de l'UE : Introduire les étudiants à la recherche dans des domaines en Calcul de Probabilités en lien avec des neurosciences et la médecine.

Prérequis : Trois cours fondamentaux du premier semestre.

Thèmes abordés : Modèles et Méthodes stochastiques en neurosciences et en électrophysiologie. Temps de premier passage, formule de Feynman-Kac, systèmes lents-rapides. Approximation diffusion, processus de Markov déterministes par morceaux (PDMP), applications des grandes déviations, comportement stationnaire. Estimation de paramètres à partir de l'observation de la suite des temps d' atteinte d' un seuil. Le lien avec des EDP. Reseaux bayésien - notion d'évidence, marginalisation - notion de junction tree, heuristiques de construction - notion de messages, th'eorèmes fondamentaux - algorithmes de propagation, inward/outward, lois jointes - applications diverses- calcul et maximisation de de la vraisemblance. Illustartions dans le contexte biomédical pour lesquels les calculs seront implémentés sous le logiciel R. Modèles mathématiques en biologie molécullaire, expréssion du gène, production de protéines dans les cellues prokaryotes, phénomènes de polymérisation.

5MA05 Probabilités et Analyse (6 ECTS) (2ème semestre)

Professeurs : Lorenzo Zambotti, Milica Tomasevic, Laure Dumaz
mel : Lorenzo.Zambotti@sorbonne-universite.fr
mel : Laure.Dumaz@ens.fr
mel : Milica.Tomasevic@polytechnique.edu
url :https://www.sorbonne-universite.fr/~salez/
url : https://www.ens.fr/~dumaz/
url :http://www-sop.inria.fr/members/Milica.Tomasevic/

Objectifs de l'UE : Introduire les étudiants dans des sujets de recherche dans le domaine de Probabilités et Analyse.

Prérequis : Cours fondamentaux du premier semestre.

Thèmes abordés : Rough paths et applications aux equations aux dérivées partielles. Processus de type McKean-Vlassov et equations paraboliques. Opérateurs aléatoires généralisés de Sturm Liouville de premier ou deuxiÃÍme ordre.

5MA13 UE de Mémoire de recherche ou de stage (12 ou 18 ECTS) (2ème semestre)

Deux possibilités se présentent.

La première possibilité : l'étudiant analyse en profondeur un ou plusieurs articles scientifiques sous la direction d'un enseignant. Ce travail aboutit à un mémoire de recherche (12 ECTS) que l'étudiant doit écrire et ensuite soutenir devant un jury. Ce travail de recherche est préparatoire pour la thèse.

La deuxième possibilité pour cette UE : l'étudiant effectue un stage en entreprise ou dans un institut de recherche sous la direction conjointe d'un ingénieur (ou chercheur) de cet organisme et un enseignant de la spécialité. L'étudiant doit écrire un rapport de stage et soutenir son travail devant un jury.

Les memoires et les stages de durée inférieure à trois mois sont accredités de 12 ECTS. Les stages industriels de durée supérieure de 3 mois sont accredités de 18 ECTS.

3.6 Responsable et site

Responsable : Irina Kourkova, Professeur à Sorbonne Université.
Adresse electronique : Irina.Kourkova@sorbonne-universite.fr
Site : https://www.lpsm.paris/formation/masters/m2-probabilites-et-modeles-aleatoires/
Secrétariat : Yann Poncin, Sorbonne Université
2ÃÍme étage, couloir 14-15, Campus Jussieu, Sorbonne Université

Chapitre 4

Master 2, Parcours Probabilités et Finance

Ce master 2 est actuellement co-opéré avec l'École Polytechnique.

4.1 Objectifs et descriptions

L'objectif de ce parcours est d'apporter aux étudiants un enseignement de haut niveau dans le domaine de la finance mathématique probabiliste. Celle-ci recouvre l'ensemble de la finance de marchés, avec un accent tout particulier mis sur les instruments dérivés, l'étude approfondie des taux d'intérêt, l'analyse du risque d'une part et les méthodes numériques de la simulation de Monte Carlo au Machine Learning d'autre part.

L'année se décompose en un semestre de cours intensifs (de début septembre septembre à fin mars) et un semestre de stage dans un établissement financier (de début avril au 30 septembre, éventuellement prolongeable jusqu' à la fin de l'année civile en cours).

4.2 Débouchés professionnels

Les diplômés de ce parcours s'orientent majoritairement vers les cellules de recherche des établissements financiers en France, en Europe (Londres) et dans le reste du monde (USA, Asie). Une fraction d'entre eux s'oriente vers la recherche (thèse, thèse CIFRE, etc.), puis vers des carrières universitaires.

4.3 Organisation

L'année se décompose en deux semestres.

Semestre 1 : Tronc commun fondamental

Il s'agit d'un semestre de cours intensifs.

– 4 cours de remise à niveau à choisir parmi 4 (Informatique de Python à $C++$, Probabilités, Statistique, EDP pour la Finance) pendant deux semaines à partir de la seconde semaine de tout début septembre.

– 1 bloc (UE) “Probabilités, méthodes numériques et optimisation" (à partir de fin septembre).

– 1 bloc (UE) “Finance de marché, dérivés et économétrie" (à partir de fin septembre).

Le tronc commun s'achève par une session d'examens la semaine de la rentrée en janvier.

Semestre 2 : Spécialisation et Professionnalisation

Le second semestre est constitué de deux phases.

Lors de la première, de janvier à fin mars, les étudiants doivent

– Valider deux cours obligatoires et (au loins) quatre cours d'option organisés en majeure et mineure.

– Réaliser un projet informatique dans la continuité du cours de *Probabilités numériques et méthode de Monte Carlo en Finance* du tronc commun.

La seconde partie de ce semestre est consacrée au stage en entreprise d'une durée minimale de 5 mois entre la mi-avril (après la fin de la session de rattrapage) et la fin septembre. Celui-ci doit impérativement avoir lieu en entreprise pour être validé.

Un séminaire hebdomadaire est entièrement dévolu à la recherche de stage : les entreprises y sont invitées à venir se présenter et à détailler leurs offres de stage. Le programme du séminaire est consultable sur le site (cf. infra).

4.4 Publics visés, prérequis

Les titulaires d'un M1 de mathématiques appliquées et les élèves de troisième année d'école d'ingénieurs. Les pré-requis sont :

– quantitativement : un excellent niveau général en mathématiques appliquées (Mention Bien au M1 ou top 15% dans une école d'ingénieurs ; double-cursus apprécié).

– qualitativement : un parcours ayant privilégié les disciplines de l'aléatoire (probabilités et statistique), si possible complété par des connaissances en Analyse appliquée (EDP) et un acquis solide en calcul scientifique (programmation C, C++).

La sélection des candidats est faite par un jury conjoint “Sorbonne Université-École Polytechnique".

4.5 Liste des UE

• Au premier semestre :

5MK01 Probabilités et calcul stochastique pour la finance" (15 ECTS) (1er semestre)

Professeur : Gilles Pagès

courriel : gilles.pages@sorbonne-universite.fr

http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/pages/

Objectifs de l'UE : Acquérir les outils mathématiques fondamentaux, notamment à caractère probabiliste et statistique en vue de leur application en finance de marché.

Prérequis : Cf. pré-requis généraux pour l'admission dans le parcours "Probabilités et Finance" du Master 2 de mathématiques et Applications

Thèmes abordés : Cette UE est constituée des 4 cours (ou ECUE) suivants : Introduction aux processus de diffusion et calcul stochastique ; Probabilités numériques : méthode de Monte Carlo en finance ; Optimisation convexe et contrôle stochastique ; Machine learning, réseaux de neurones et apprentissage profond. Les contenus de ces cours sont détaillés dans les paragraphes ci-après.

Cette UE est constituée des modules suivants :

- Introduction aux processus de diffusion, calcul stochastique (24C+ 24 TD, L. Zambotti).

  Ce cours vise à fournir les outils probabilistes de base nécessaires à la théorie financière en univers aléatoire.
  – Rappels de probabilités.
  – Processus gaussiens. Mouvement brownien.
  – Espérance conditionnelle. Martingales.
  – Intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien.
  – Calcul stochastique. Formule d'Itô. Théorème de Girsanov.
  – Équation différentielles stochastiques. Caractère Markovien des solutions. Liens avec certaines E.D.P.

- Probabilités numériques : méthode de Monte Carlo en finance (30C+18 TD+ projet cf. ci-après, G. Pagès, V. Lemaire).

  Le but de ce cours est de présenter les méthodes de Monte-Carlo et de Quasi-Monte-Carlo d'usage courant en finance. De nombreux exemples issus de problèmes de calcul de prix et de couverture d'options illustrent les développements. Une mise en œuvre informatique des techniques abordées sera effectuée lors des séances de TD. Chaque étudiant devra réaliser, en binôme, un projet informatique (en langage C++) implémentant, soit des calculs de prix et de couvertures d'options, soit des simulations de modèles financiers. Il remettra un rapport décrivant les méthodes utilisées et commentant les résultats obtenus. Ce cours aborde les thèmes suivants :
  – Introduction à la simulation : génération de variables aléatoires suivant les lois usuelles.
  – Méthode de Monte-Carlo : calcul d'espérance par simulation.
  – Méthodes de réduction de variance : variables de contrôle, échantillonnage préférentiel, variables antithétiques, stratification, conditionnement.
  – Quasi-Monte-Carlo : techniques de suites à discrépances faibles.
  – Optimisation stochastique, approximation stochastique, gradient stochastique et application à la résolution de problèmes inverses en finance.
  – Discrétisation en temps des équations différentielles stochastiques (schéma d'Euler, de Milstein) : application au pricing d'options européennes.
  – Amélioration de la méthode dans le cas d'options path-dependent : ponts browniens, pont de diffusion.
  – Calcul de couvertures et de sensibilités par méthode de Monte-Carlo.
  – Méthodes multi-niveaux avec et sans poids.

- Optimisation convexe et contrôle stochastique (24 C, N. Touzi)

  Ce cours vise à fournir les outils probabilistes de base nécessaires en optimisation convexe et en contrôle stochastique en vue d'applications à la finance.
  - Optimisation convexe.
  - Contrôle stochastique.

- Machine learning, réseaux de neurones et apprentissage profond (24 C +12 TP, P. Gallinari, O. Schwander et B. Wilbertz).

  Le but de ce cours est de présenter :
  – les principales méthodes employées en Machine learning (régressions linéaire et non-linéaire, arbres de décision (random forest, CART, Catboost, etc)),
  – les résaux de neurones (perceptron multicouches, rétro-propagation du gradient et gradient stochastique)
  – les derniers développements en apprentissage profond (neurones convolutionnels, récurrents)

  le tout dans un esprit résolument tourné vers les applications. Le cours est sanctioné par un examen et un mini-projet.

Un polycopié (incluant une bibliographie) et/ou les slides utilisés encours sont fourni dans chacun des cours.

5MK02. Finance de marché, dérivés et économétrie (15 ECTS) (1er semestre)

Professeur : M. Rosenbaum

courriel : mathieu.rosenbaum@sorbonne-universite.fr

http://www.cmap.polytechnique.fr/~rosenbaum

Objectifs de l'UE : Acquérir les concepts probabilistes et les outils modernes en optimisation pour maîtriser les méthodes quantitatives mises en œuvre sur les marchés financiers, de matières premiéres et de l'énergie.

Pré-requis : Cf. pré-requis généraux pour l'admission dans le parcours "Probabilités et Finance" du Master 2 de Mathématiques et Applications.

Thèmes abordés : Cette UE est constituée des 5 cours (ou ECUE) suivants : processus stochastiques et produits dérivés en temps discret et continu ; économétrie sur données financières ; marchés financiers et théorie financière ; mesures de risque et extrêmes ; Introduction aux modèles de saut.

Les programmes de ces cours sont détaillés ci-dessous.

- Processus stochastiques et produits dérivés en temps discret et continu (27C + 27 TD, E. Gobet & N. El Karoui).

  Le marché des produits dérivés est un élément important du transfert des risques de marché des investisseurs vers les établissements financiers. L'objectif du cours est de décrire les produits financiers proposés, et les méthodes théoriques et pratiques mises en oeuvre dans le marché pour évaluer et couvrir ces produits financiers. Le cours comprend plusieurs parties : une première partie sur les dérivés sur actions, européens ou exotiques avec une large référence au modèle de Black Scholes, et ses nombreuses applications dans un monde sans arbitrage, dominé par la vision "implicite" du marché. Une partie sur les taux d'intérêt et leur récents développements. Une partie sur la mesure des risques de marchés, via la VaR, et ses extensions.

I. Évaluation et couverture des produits dérivés sur action.
– Présentation des marchés à terme et des marchés d'options
– Le modèle de Black et Scholes : évaluation et couverture des options d'achat ou de vente par réplication dynamique. L'EDP d'évaluation. La formule de Black et Scholes.
– Le portefeuille de couverture. Les Grecques. La volatilité implicite.
– Robustesse de la formule de Black et Scholes.
– Options barrières dans le monde de Black et Scholes. Formules fermées, couverture. Autres options exotiques.
– L'absence d'arbitrage et la réplication statique. La formule de Carr et la distribution implicite.
– Premières réflexions sur la calibration. Distribution risque-neutre implicite.
– Volatilité stochastique : Formule de Dupire et volatilité locale. Introduction aux problèmes de calibration. Les modèles à volatilité stochastique exogène. (Marché incomplet)
– Théorie de l'arbitrage multi-dimensionnel : Absence d'arbitrage et primes de risques.
– Changement de numéraire ; numéraire de marché.

II. Problèmes de taux d'intérêt.
– Introduction au marché des taux d'intérêt et des produits dérivés de taux.
– Définition et construction de la courbe des taux :
– Les modèles classiques, Vasicek, C.I.R, Longstaff et Schwarz, modèles affines.
– Les modèles multifacteurs. Modèles de HJM : Equations de structure des taux d'intérêt issues de l'arbitrage.
– Le modèle de BGM ou modèle de marché. Approximations.
– Options de taux et instruments hybrides : évaluation et couverture.
– Swaps,Obligations à taux variable.
– Caps, floors, swaptions, boosts.
– Matrices de volatilité et Problèmes de calibration.

III. Mesures des risques.
– Présentation des normes réglementaires.
– La Value-at-Risk d'un portefeuille. Problèmes pratiques et méthodologiques.
– Le concept de mesures de risques.
– Application au pricing en marché incomplet.

◦ Finance haute fréquence : outils probabilistes, modélisation statistique à travers les échelles et problèmes de trading (30C, M. Rosenbaum).

Après avoir rappelé les outils économétriques standards, on s'intéressera dans ce cours au traitement des principales questions statistiques se posant lors de l'analyse des données financières.

Les thèmes suivants sont abordés : . – Analyse en composantes principales.
– Modèle linéaire et moindres carrés.
– Séries temporelles.
– Statistique des extrêmes.
– Mesures de dépendances entre actifs.
– Introduction aux problèmes en grande dimension.
– Quelques éléments de statistique des diffusions.

◦ Marchés financiers et théorie financière (30 C, V. Lozève, C. de Langue).

Dans une première partie du cours, les divers marchés financiers seront présentés, avec une attention particulière au marché des capitaux. Les mécanismes et utilisations des contrats futures seront étudiés dans le détail. Le cours suivra le fil des produits et techniques qui permettent une gestion des risques efficace dans cet environnement spécifique. Quelques incursions auront lieu dans le domaine des techniques quantitatives d'évaluation, mais le cours restera introductif en cette matière.

Une deuxième partie du cours se concentrera sur le marché des actions. Les éléments essentiels de la théorie financière au sens de Markowitz seront présentés et discutés, avec des implications importantes en terme de gestion de portefeuille.

◦ Mesures de risque et extrêmes (18 C, A. Alfonsi & L. Abbas-Turki).

Le but de ce cours est de présenter les outils de mesure des risques concernant la salle de marché et la gestion du “book" (portefeuille d'actifs) pour une échelle de temps courte (1 à 10 jours). Les principaux thèmes théoriques seront : la théorie des valeurs extrêmes, la représentation multidimensionnelle des risques via les copules, les mesures de risques monétaires et leurs diverses interprétations ainsi que la présentation par des intervenants de marché de leur implémentation pratique, les normes réglementaires concernant le risque de marché à court terme, la VaR et son implémentation, la gestion du risque de modèle et le calcul de réserves sur les books de produits dérivés.
Cette ECUE constitue la première partie – théorique – du cours de risques. La seconde partie, plus pratique et assurée par des professionnels, est proposée en cours d'option (Ouverture professionnelle).

– Introduction : le cadre des recommandations de Bâle, mesurer le risque avec la valeur en risque.
– Mesures de risques monétaires, convexes, cohérentes (I).
– Mesures de risques monétaires : propriétés de la VaR et de la CVaR (II).
– Sortir du modèle gaussien pour calculer la VaR. Quantiles : définitions et estimation à l'aide de la théorie des lois de valeurs extrêmes (I).
– Quantiles : estimation à l'aide de la théorie des lois de valeurs extrêmes (II).
– Modélisation des corrélations : les copules.
– Simulation, estimation des copules.

◦ Introduction aux modèles de saut (12 C, T. Duquesne)

Ce cours propose une introduction au nuages et aux processus de Poisson, simple et composés, et à leurs applications en Finance, notamment aux modèles d'actifs avec sauts poissonniens incluant ou non une composante brownienne de type Merton. DIl s'agit d'un premier cadre où apparaissent des modèles non complets dans lesquels on introduira des notions de couverture en moyenne quadratique, etc. Des calculs explicites des risques résiduels et des couvertures optimales seront menées à bien, préparant l'étude des modèles dirigés par des processus de Lévy.
Attention ! Ce cours a lieu au second semestre (janvier) pour des raisons d'emploi du temps.

Un polycopié (incluant une bibliographie) est fourni dans chacun des cours.

• Au second semestre :

Spécialisation et Professionnalisation (30 ECTS) (2è semestre)
Professeurs : Gilles Pagès et Nizar Touzi

courriel : gilles.pages@sorbonne-universite.fr et emmanuel.gobet@polytechnique.edu

http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/pages/
et
http://www.cmap.polytechnique.fr/~touzi/

Objectifs de l'UE : Il s'agit d'offrir aux étudiants à la fois un parcours de spéciali sation thématique qui clôt leur parcours académique et une composante applicative professionnalisante. La spécialisation se traduit par le choix de quatre cours d'options donnant lieu à évaluation dont deux (au moins) choisis dans une thématique répertoriée ci-dessous constituant la “majeure", les deux autres étant laissés en libre choix pour constituer la “mineure". Majeure et mineure confèrent 3 ECTS. La professionnalisation se concrétise dans une première phase par la réalisation d'un projet informatique (3 ECTS) en programmation scientifique pour la finance en liaison avec le cours de Probabilités numériques. Le cœur de cette UE reste cependant l'insertion professionnelle (3 ECTS) et le stage obligatoire d'une durée minimale de 5 mois (18 ECTS) en immersion complète dans le milieu professionnel.

Pré-requis : Acquisition des connaissances du 1er semestre.

Thèmes abordés : Les parcours et les cours de spécialisation sont

Cette UE est constituée des cours (ou ECUE) suivants :

- Cycle de cours-conférences “Ce que les crises financières nous enseignent : éévolution des pratiques et de la régulation” par M. Vincent (Bank Resolution & Financial Stability Expert à Single Resolution Board (Communauté européenne)). (L'évaluation est couplée avec le module d'insertion professionnelle (OIP) dans une proportion de 1/3) :
- Module “Spécialisation (Options)" (6 ECTS).
  – deux cours à valider dans module spécialisé (*majeur*),
  – deux autres cours à valider parmi les autres parcours (*mineure*),

Attention : Certains cours peuvent figurer plusieurs fois.

Les trois cours suivis d'une astérisque (*) sont éligibles au parcours labellisés “Big Data". Plus d'information sur labellisation possible de la filière, voir www.ljll.math.upmc.fr/FilBigData/index.php

Méthodes numériques avancées
- Optimisation stochastique pour le Machine learning en Finance (*) (15h, G. Pagès, M06AK06).
- Nouveaux outils numériques déterministes et probabilistes : du pricing d'option aux big data (*) (15h, L. Abbas-Turki, M06AK12).
- Machine learning pour les produits dérivés (15h, V. Lemaire, 5MK04).
- Équations de McKean-Vlasov et applicatuions (15h, M. Tomasevic, M06AK05).
- Algorithmes de Monte-Carlo pour chaînes de Markov et méthodes particulaires (15h, B. Jourdain, M06AK25).

Statistique et trading haute fréquence
- Finance haute fréquence : outils probabilistes, modélisation statistique à travers les échelles et problèmes de trading. (24 h, E. Bacry, M06AK10).
- Trading quantitatif : utilisation d'estimateurs haute fréquence pour l'exécution et l'arbitrage (15h, Ch. Lehalle + 12h TD S. Laruelle M06AK13).
- Algorithmes et gradients stochastique : de la Finance aux données massives (*) (15h, G. Pagès, 5MK06).

Les TD du cours 5MK13 sont ouverts aux étudiants suivant le cours 5MK10 et, le cas échéant, seront pris en compte dans son évaluation.

Produits dérivés (avancés)

- ◦ Non linear pricing (15h, P. Henry-Labordère, M06AK22).
- ◦ Contrôle stochastique pour les marchés imparfaits (15h, I. Kharroubi, M06AK24)
- ◦ Calibration de modèles (15h, S. de Marco, M06AK11).
- ◦ Modèles de taux et produits dérivés : nouveau paradigme, risque de contrepartie (15h, S. Migus, O. El Hajjaji & N. El Karoui, M06AK16).

Nouveaux marchés

- ◦ Valorisation et gestion du risque sur les marchés de l'énergie (15h, O. Bardou, M06AK07).
- ◦ Stratégies quantitatives : application au marché du crédit (15h, J. Turc & R. Dando, M06AK08).
- ◦ Risque de Longévité (15h, C. Hillairet, S. Loisel & N. El Karoui, M06AK016).
- ◦ Le risque cyber et sa modélisation mathématique (15h, C. Hillairet et O. Lopez, encodage en cours).

Ouverture professionnelle

- ◦ Allocation d'actifs et arbitrage multi-asset (15h, J.G. Attali, M06K09).
- ◦ Trading quantitatif : utilisation d'estimateurs haute fréquence pour l'exécution d'ordres (15h, Ch. Lehalle + 12h TD S. Laruelle, M06AK13).
- ◦ Stratégies quantitatives et risque de crédit (15h, J. Turc & R. Dando, M06AK08).

Les examens de cette UE ont lieu fin mars et ne donnent pas lieu à session de rattrapage.

- Module “Anglais/Projet informatique" (3 ECTS) : un projet informatique à réaliser en $C++$ (ou en CUDA/Open CL) couplé au cours de Probbailités numériques du semestre 1 (ne peut être validé seul). Un vivier de 25 sujets, généralement des articles de recherche récents en Probabilités numériques appliquées à la Finance (écrits en Anglais), sont proposés aux étudiants.

- Module “Stage" (21 ECTS).

  Un stage de 5 à 6 mois mois en entreprise débutant le deuxème lundi avril, après validation du sujet scientifique du stage par l'équipe pédagogique. La soutenance a lieu fin septembre en présence du Maître de stage et d'un membre de l'équipe pédagogique.

4.6 Responsable et site

Gilles Pagès est le responsable Sorbonne Université du parcours. La formation dispose d'un site internet propre (webmaster : G. Pagès) :

https://finance.math.upmc.fr

sur lequel on peut consulter

- ◦ La liste des cours incluant résumé et bibliographie (notamment les cours d'options partiellement renouvelés chaque année),

- Le programme du séminaire hebdomadaire “Étudiants-Entreprise" de l’année en cours.
- L’historique des sujets de stage sur 6 ans,
- L’Annuaire des Anciens (accès sur abonnement, accès libre pour la promotion en cours).

Le formulaire de candidature spécifique sont téléchargeables sur le site (combiné à un lien d’accès au site de l’Université pour les pré-inscriptions). L’essentiel du site est bilingue (français-anglais).

La liste des cours est aussi consultable via la plaquette du Master 2, *Probabilités & Applications*, mise en ligne sur le site du LPSM comme pour l’ensemble des formations de Sorbonne Université placées sous la responsabilité scientifique du LPSM.

Secrétariat : Yann PONCIN yann.poncin@sorbonne-universite.fr
4, place Jussieu - Tour 16
Couloir 16-26 - 1er Etage - Bureau 08
Case courrier 188
75252 PARIS CEDEX 05

Téléphone : 01.44.27.53.20.
Tél : 01.44.27.76.50.
Site : http://ww.lpsm.paris

Chapitre 5

Master 2, Parcours Mathématiques de la modélisation

Ce diplôme de master est cohabilité avec l'Ecole Polytechnique et l'ENPC. La formation de M2 "Mathématiques de la modélisation" est assurée par l'UFR 929 conjointement avec

- l'École Polytechnique,
- l'École Nationale des Ponts et Chaussées,
- Inria.

Certains cours peuvent être empruntés aux masters de PSL à Dauphine.
Responsable du parcours : Antoine Gloria.
Directeur adjoint et responsable des stages : Antoine Le Hyaric.

Site web : https://www.ljll.math.upmc.fr/MathModel/

5.1 Objectifs et descriptions

La modélisation mathématique permet de résoudre des problèmes issus de domaines variés (physique, biologie, économie, ...), par l'analyse mathématique et la simulation numérique des modèles proposés.

Parmi les connaissances et compétences attendues à l'issue du master, signalons (en fonction de la majeure choisie) :

- Théorie des équations aux dérivées partielles, discrétisation numérique, analyse d'erreurs.
- Aspects aléatoires.
- Optimisation continue et discrète, calcul des variations, théorie des jeux.
- Théorie du contrôle en dimension finie ou infinie, contrôle optimal, problèmes inverses.
- Outils d'analyse, de simulation et de modélisation utilisés en sciences du vivant.
- Informatique scientifique, calcul scientifique, calcul parallèle, conception assistée par ordinateur.

Les étudiants devront également acquérir des connaissances dans les domaines applicatifs variés : informatique, biologie, physique, mécanique, économie...

5.2 Débouchés professionnels

Le parcours forme des chercheurs de haut niveau en mathématiques appliquées pouvant faire carrière dans l'enseignement supérieur et la recherche, participer aux programmes de haute technologie de l'industrie, ou intégrer des centres d'étude et de décision des grandes entreprises. Elle forme aussi des mathématiciens de type ingénieur maîtrisant tous les aspects du calcul et de l'informatique scientifique moderne, dont le profil intéresse les bureaux d'étude industriels ou les sociétés de service en calcul scientifique.

Si la poursuite en doctorat est un débouché naturel du parcours, celle-ci n'est pas une obligation et cette dernière offre bien d'autres possibilités.

Pour les étudiants qui souhaitent poursuivre en doctorat, l'équipe pédagogique apporte un soutien personnalisé dans la construction du projet de thèse.

De très nombreuses offres de stages, thèses, ou emplois, sont mises en ligne sur le site web du parcours, au fur et à mesure que nous les recevons.

5.3 Organisation

L' année est divisée en quatre périodes comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

phase	**I**	**II**	**III**	**IV**
période	sept-oct	oct-nov-déc	janvier-mars	avril-sept
intitulé	Cours de base	fondamentaux	spécialisés	stage ou mémoire
durée	6 semaines	8 semaines	10 semaines	$\geq$ 3 mois
ECTS	12	18	12	18

Il y a donc trois périodes de cours :
— cours de base de septembre à octobre (6 semaines)
— cours fondamentaux (8 semaines)
— cours spécialisés (10 semaines)

Le premier semestre S3 du M2 est composé des cours de base (phase I) et des cours fondamentaux (phase II), l'ensemble comptant pour 30 ECTS. Le S4 est constitué des cours specialisés (phase III) comptant pour 6 ECTS chacun, complétés par un stage de recherche en entreprise ou un mémoire (phase IV), et compte donc également pour 30 ECTS.

Il faut donc impérativement valider **au minimum 3 cours fondamentaux et 2 spécialisés** (les semestres étant non compensables).

Dans le but d'orienter et d'accompagner les étudiants vers les sujets et les carrières de leur choix, nous proposons de structurer les études autour de thèmes, appelés **Majeures**. Elle s'articulent aussi bien autour des domaines applicatifs que des méthodes mobilisées. Voici la liste des six Majeures :

— **ANEDP** : Analyse numérique et équations aux dérivées partielles. Responsable : K. Schratz.
— **AMM** : Aléa et mathématiques de la modélisation. Responsable : A. Gloria.
— **COCV** : Contrôle, Optimisation, Calcul des Variations. Responsable : E. Trélat.
— **EMF** : Energies et Matériaux pour les Futurs. Responsables : B. Després et E. Cancès.
— **HPC** : Calcul scientifique hautes performances. Responsable : F. Nataf.
— **MBIO** : Mathématiques de l'écologie et des milieux vivants. Responsables : L. Almeida et M. Thieullen.

Chaque Majeure propose un ensemble cohérent de cours fondamentaux et spécialisés, ouvrant ainsi à de nombreux débouchés naturels. Le choix des cours à l'intérieur de chaque Majeure est libre et il est possible de choisir des cours en dehors des listes proposées : dans les deux cas, cela est soumis à l'avis du responsable de la Majeure, qui fait office de directeur d'études.

C'est **à l'issue des cours de base** que les étudiants devront choisir **obligatoirement** l'une des six Majeures proposées.

Il est possible pour un étudiant de combiner des cours de plusieurs Majeures. Le choix précis doit se faire en concertation avec le responsable de parcours, dont le rôle est de vérifier la cohérence du choix, en fonction du projet professionnel de l'étudiant.

5.4 Publics visés, prérequis

Les personnes susceptibles d'intégrer le parcours sont les étudiants des universités ayant effectué une première année de Master, les élèves ingénieurs des grandes écoles, et étudiants d'universités étrangères ayant une formation équivalente. Dans tous les cas, une solide formation mathématique est requise, en particulier dans les domaines de l'analyse ou de l'analyse numérique. L'admission se fait sur dossier compte tenu du niveau et du cursus antérieur.

5.5 Description des Majeures

Analyse numérique et équations aux dérivées partielles (ANEDP)
Responsable : K. Schratz.

Cette Majeure a pour thème central l'étude théorique et numérique des problèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires provenant de domaines variés tels que la physique, les sciences de l'ingénieur, la chimie, la biologie, l'économie, ainsi que les méthodes de calcul scientifique qui ont pour but la simulation numérique de ces problèmes. Le calcul scientifique est devenu la clé maîtresse du progrès technologique, il nécessite une compréhension approfondie de la modélisation mathématique, de l'analyse numérique, et de l'informatique. La Majeure, par sa large gamme de cours, permet d'explorer et de maîtriser les divers aspects de ces disciplines. Les différents domaines mathématiques concernés sont variés et en évolution rapide. Leur développement se traduit par un besoin accru en chercheurs mathématiciens dont la formation est un des objectifs de la Majeure. Les cours proposés couvrent les domaines suivants :

— La modélisation mathématique de nombreux domaines d'applications : mécanique des solides, mécanique des fluides, phénomènes de propagation (acoustique, sismique, électromagnétisme), traitement du signal et de l'image, finance, chimie et combustion.
— L'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires (existence, unicité et régularité des solutions).
— Les méthodes d'approximation : éléments finis, différences finies, méthodes spectrales, méthodes particulaires, ondelettes.
— La mise en oeuvre sur ordinateur de ces méthodes et la conception de logiciels de calcul scientifique.

Aléa et mathématiques de la modélisation (AMM)
Responsable : A. Gloria

Les aspects probabilistes sont de plus en plus pris en compte dans les modèles, ce qui conduit à mêler analyse et probabilité. La Majeure AMM a pour thème central l'étude théorique et numérique des problèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires en présence d'aléa ou d'incertitudes. Le développement récent de quantification des incertitudes et des aspects aléatoires rend les probabilités de plus en plus importantes dans ce domaine. Les cours proposés couvrent les domaines suivants :

— La modélisation mathématique (déterministe et probabiliste) de nombreux domaines d'applications : mécanique des solides, mécanique des fluides, phénomènes de propagation (acoustique, sismique, électromagnétisme), traitement du signal et de l'image, finance, chimie et combustion.
— L'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires déterministes et aléatoires (existence, unicité et régularité des solutions).
— Les méthodes d'approximation, avec un accent sur les méthodes probabilistes.

Il est possible d'emprunter des cours proposés dans d'autres formations avec l'accord du responsable de majeure ; en particulier au master de probabilités et modèles aléatoires de SU et au master "applied and theoretical mathematics" M2 ATM de Dauphine.

Contrôle, Optimisation, Calcul des Variations (COCV)
Responsable : E. Trélat

Cette Majeure propose une formation de haut niveau dans les domaines du Contrôle, Optimisation et Calcul des Variations. La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes contrôlés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'un contrôle (ou commande). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, discrets, avec bruit, avec retard, équations aux dérivées partielles... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie, théorie des jeux, informatique... Les objectifs peuvent être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations, ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal). La théorie du contrôle optimal généralise la théorie mathématique du calcul des variations.

Les débouchés envisagés sont aussi bien académiques qu'industriels. La formation mène à des thèses académiques ou à des thèses dans le milieu industriel (thèse CIFRE par exemple, en partenariat universitaire), ou à des emplois d'ingénieurs dans des domaines spécialisés comme l'aéronautique ou l'aérospatiale. Dans les industries modernes où la notion de rendement est prépondérante, l'objectif est de concevoir, de réaliser et d'optimiser, tout au moins d'améliorer les méthodes existantes. De ce fait beaucoup d'autres débouchés industriels existent : services R&D de Thalès, IFPen, EDF, ArianeGroup, Dassault, RTE, etc. Cette formation intéresse aussi beaucoup les organismes comme le CEA ou Inria. Enfin, de multiples partenariats existent avec un très grand nombre d'universités en France et à l'étranger, garantissant de nombreuses possibilités de thèses académiques.

Energies et Matériaux pour les Futurs (EMF)
Responsable : B. Desprès et E. Cancès

La production d'énergie, ainsi que l'utilisation de sources d'énergies de toutes sortes, tant classiques qu'alternatives, nécessitera dans un avenir proche un renforcement de la recherche fondamentale et appliquée. Par classique on peut entendre les énergies hydraulique, nucléaire de fission, pétrolière, etc. Par alternative on entend l'énergie nucléaire de fusion, éolienne, photovoltaïque, etc. Dans tous ces domaines il faut prendre en compte des phénomènes complexes dont la modélisation sous forme de systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) et leurs résolutions numériques sont déterminantes pour les avancées de la recherche scientifique.

De même, le développement de nouveaux composés chimiques et de nouveaux matériaux (matériaux composites, micro et nanostructurés, graphène et nanotubes de carbones, biomatériaux, méta-matériaux, matériaux intelligents, ...) donne lieu à des avancées spectaculaires dans tous les domaines de l'ingénierie. Ces recherches s'appuient également de plus en plus sur la simulation numérique de modèles faisant intervenir des EDP, ainsi que sur des modèles stochastiques.

La majeure EMF (Energies et Matériaux pour les Futurs) entend proposer un ensemble cohérent de cours qui aborde quelques-uns des aspects fondamentaux de ces problématiques.

Les cours fondamentaux portent sur les approximations variationnelles et la simulation numérique des EDP elliptiques, l'étude théorique et numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation utilisés notamment en mécanique des fluides, le couplage de modèles à différentes échelles, et la simulation numérique des modèles stochastiques.

Les cours spécialisés de la filière "énergie" portent sur la mécanique des fluides incompressibles, les écoulements complexes (cela va par exemple des modèles d'écoulements compressibles ou diphasiques pour les coeurs de centrales nucléaires aux modèles de barrages), ou les modèles cinétiques (ou particulaires).

Les cours spécialisés de la filière "matériaux" portent sur la théorie spectrale et les méthodes variationnelles utilisées notamment dans les modèles quantiques de la matière, les modèles de biomatériaux solides et fluides, et les méthodes mathématiques et numériques utilisées dans les simulations à l'échelle moléculaire.

Les cours proposés permettent d'acquérir tout à la fois une bonne maîtrise de l'analyse théorique des EDP concernées et de l'analyse numérique des méthodes d'approximation les plus récentes utilisées pour les simuler, et une connaissance d'un ou plusieurs domaines d'application, avec un accent mis sur la modélisation. Cette majeure est proposée en partenariat avec l'ENPC.

Calcul scientifique haute performance (HPC)
Responsable : F. Nataf

Le calcul scientifique Haute Performance est un enjeu stratégique pour la recherche scientifique et l'innovation industrielle. Les architectures de calcul modernes, en évolution continue, allient en effet des composantes dont la rapidité ne cesse d'augmenter et dont le nombre de coeurs dépasse le million. Cette puissance de calcul pétaflopique (et hexaflopique depuis peu) donne des possibilités nouvelles, mais nécessite des algorithmes nouveaux et une compréhension profonde à la fois des architectures des ordinateurs parallèles et de la modélisation mathématique.

Ces aspects de la recherche sont donc en pleine évolution pour être adaptés aux architectures actuelles et celles à venir et les compétences sur ce créneau sont indispensables mais bien trop rares tant dans la recherche que dans la formation des unités académiques. C'est aussi le cas dans les laboratoires de R & D des grands groupes industriels capables d'avoir les équipes nécessaires sur ce créneau et qui basent leur compétitivité sur un meilleur contrôle, une meilleure optimisation et une plus profonde connaissance de leurs produits par la modélisation mathématiue. Tous les industriels hitech sont concernés ainsi que les banques et les organismes concernés par les défis sociétaux (climat, pollution, planification, etc).

Les cours proposés dans cette Majeure couvrent les thèmes suivants :

— Méthodes avancées pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles issues de la physique, la chimie, la théorie des graphes.
— Introduction au calcul parallèle avec un survol des machines parallèles et modèles de programmation et une mise en oeuvre parallèle.
— Conception des algorithmes parallèles efficaces à travers la décomposition de domaines, le parallèlisme en temps, la minimisation des communications.
— Aspects calcul parallèle pour l'analyse des grands volumes de données, allant du calcul matriciel aux tenseurs en grande dimension.

Mathématiques de l'écologie et des milieux vivants (MBIO)
Responsables : L. Almeida et M. Thieullen

Cette Majeure est également accessible par le parcours “Probabilités et modèles aléatoires" de Sorbonne Université. En particulier des aménagements des cours proposés sont possibles pour les étudiants qui voudraient combiner les cours des deux parcours, après accord des responsables (voir aussi le site web).

La Majeure MBIO propose une formation centrée sur la simulation et la modélisation pour les sciences du vivant, elle s'appuie sur les outils d'analyse déterministe et stochastique. L'ambition de La Majeure n'est pas de couvrir l'ensemble des thèmes du "vivant", elle se propose de donner une vision générale des outils "continus" et des applications, couvrant des questions de biologie fondamentale et des applications biomédicales.

Cette majeure vise à la fois la formation de chercheurs dans le domaine des "Mathématiques pour la biologie" et sur des débouchés directs dans les biotechnologies.

Les étudiants qui envisagent de continuer en thèse y trouveront de nombreux sujets et supports financiers. Ils sont proposés au sein de laboratoires de mathématiques, de calcul scientifique comme de biologie ou médecine.

Les étudiants désirant terminer leur études sur un M2 y trouveront des questions scientifiques passionnantes où les mathématiques sont un outil fondamental pour traiter de la complexité des phénomènes observés. De nombreux laboratoires, instituts et entreprises utilisent maintenant la modélisation et proposent des stages.

UE proposées pour la Majeure ANEDP

UE fondamentales

- Aléa et EDP : quelques exemples (MU5MAM99)
- Introduction aux EDP d'évolution (MU5MAM12)
- Equations elliptiques (MU5MAM47)
- Analyse théorique et numérique des équations hyperboliques (MU5MAM97)
- Modèles cinétiques et limites hydrodynamiques (MU5MAM28)
- Calcul haute performance pour les méthodes numériques et l'analyse des données (MU5MAM29)
- Des EDP à leur résolution par éléments finis (MU5MAM30)
- EDP et modélisation (MU5MAM34)
- Méthodes numériques probabilistes (MU5MAM35)
- Méthodes d'approximation variationnelle des EDP (MU5MAM36)

UE spécialisées

- Autour de la stabilité de l'espace-temps de Minkowski (MU5MAM75)
- Théorie spectrale et méthodes variationnelles (MU5MAM87)
- Equations de réaction - diffusion et dynamiques de populations biologiques (MU5MAM05)
- Active Particles : Emerging Behavior in Collective Dynamics (cours FSMP)
- Du fluide de Stokes aux suspensions de solides rigides : aspects théoriques et numériques (MU5MAM98)
- Jeux à champ moyen (MK27)
- Modèles mathématiques et méthodes numériques pour la simulation en hémodynamique (MU5MAM26)
- Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'océanographie, des risques naturels et de l'énergie (MU5MAM27)
- Méthodes de Galerkine discontinues et applications (MU5MAM21)
- Méthodes modernes et algorithmes pour le calcul parallèle (MU5MAM50)
- Méthodes mathématiques et analyse numérique pour la simulation moléculaire (MU5MAM38)

- Réseaux de neurones et approximation numérique adaptative (MU5MAM86)
- Approximation et traitement de données en grande dimension (MU5MAM73)
- Méthodes de tenseurs pour la résolution d'EDPs en grande dimension (MU5MAM84)

UE proposées pour la Majeure AMM

UE fondamentales

- Aléa et EDP : quelques exemples (MU5MAM99)
- Introduction aux EDP stochastiques (MU5MAM63)
- Introduction aux EDP d'évolution (MU5MAM12)
- Equations elliptiques (MU5MAM47)
- Contrôle en dimension finie et infinie (MU5MAM53)
- Méthodes numériques probabilistes (MU5MAM35)

UE spécialisées

- Jeux à champ moyen (MK27)
- Méthodes mathématiques et analyse numérique pour la simulation moléculaire (MU5MAM38)
- Modèles probabilistes en Neurosciences (MU5MAM51)
- Entropy methods, functional inequalities and applications (M2 ATM Dauphine)
- Pathwise techniques in stochastic analysis : rough paths & Co (M2 ATM Dauphine)

UE proposées pour la Majeure COCV

UE fondamentales

- Contrôle en dimension finie et infinie (MU5MAM53)
- Equations elliptiques (MU5MAM47)
- Introduction aux EDP d'évolution (MU5MAM12)
- Optimisation continue (MU5MAM02 – M2 ATM Dauphine)
- Equations structurées en biologie (MU5MAM70)
- Analyse théorique et numérique des équations hyperboliques (MU5MAM97)
- Méthodes du premier ordre pour l'optimisation non convexe et non lisse (MU5MAM71)
- Théorie des jeux : applications en économie et en finance (MU5MAM17 – M2 MASEF Dauphine)

UE spécialisées

- Théorie géométrique du contrôle (MU5MAM80)
- Algèbre tropicale en optimisation et en jeux (MU5MAM58)
- Réseaux de neurones et approximation numérique adaptative (MU5MAM86)
- Fonctionnement des réseaux de neurones : analyse mathématique (MU5MAM74)
- Approximation et traitement de données en grande dimension (MU5MAM73)
- Problèmes variationnels et de transport en économie (M2 MASEF Dauphine)
- Théorie de jeux à champs moyens (MU5MAM85 – M2 MASEF Dauphine)

— Jeux à champ moyen (MK27)

UE proposées pour la Majeure EMF

UE fondamentales

- — EDP et modélisation (MU5MAM34)
- — Analyse théorique et numérique des équations hyperboliques (MU5MAM97)
- — Modèles cinétiques et limites hydrodynamiques (MU5MAM28)
- — Méthodes numériques probabilistes (MU5MAM35)
- — Méthodes d'approximation variationnelle des EDP (MU5MAM36)
- — Introduction aux EDP stochastiques (MU5MAM63)

UE spécialisées

- — Théorie spectrale et méthodes variationnelles (MU5MAM87)
- — Du fluide de Stokes aux suspensions de solides rigides : aspects théoriques et numériques (MU5MAM98)
- — Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'océanographie, des risques naturels et de l'énergie (MU5MAM27)
- — Méthodes de Galerkine discontinues et applications (MU5MAM21)
- — Méthodes mathématiques et analyse numérique pour la simulation moléculaire (MU5MAM38)
- — Méthodes de tenseurs pour la résolution d'EDPs en grande dimension (MU5MAM84)

UE proposées pour la Majeure HPC

UE fondamentales

- — Calcul haute performance pour les méthodes numériques et l'analyse des données (MU5MAM29)
- — Des EDP à leur résolution par éléments finis (MU5MAM30)
- — Méthodes d'approximation variationnelle des EDP (MU5MAM36)

UE spécialisées

- — Méthodes modernes et algorithmes pour le calcul parallèle (MU5MAM50)
- — Méthodes de tenseurs pour la résolution d'EDPs en grande dimension (MU5MAM84)
- — Approximation et traitement de données en grande dimension (MU5MAM73)
- — Réseaux de neurones et approximation numérique adaptative (MU5MAM86)

UE proposées pour la Majeure MBIO

UE fondamentales

- — Mathematical methods in Ecology and in Biology (MU5MAM03)
- — Méthodes numériques probabilistes (MU5MAM35)
- — Analyse théorique et numérique des équations hyperboliques (MU5MAM97)
- — Equations elliptiques (MU5MAM47)
- — Contrôle en dimension finie et infinie (MU5MAM53)
- — Equations structurées en biologie (MU5MAM70)

— Some Mathematical Methods for Neurosciences (Ext. MVA)
— Statistiques et Apprentissages (MU5MAA06)

UE spécialisées

— Modèles mathématiques et méthodes numériques pour la simulation en hémodynamique (MU5MAM26)
— Modèles probabilistes en Neurosciences (MU5MAM51)
— Fonctionnement des réseaux de neurones : analyse mathématique (MU5MAM74)
— Propagation d'évidence dans les réseaux bayésiens, applications en médecine (MU5MAM83)
— Equations de réaction - diffusion et dynamiques de populations biologiques (MU5MAM05)
— Modèles stochastiques de la biologie moléculaire (Ext. PMA)
— Modèles d'équations aux dérivées partielles pour l'écologie (MU5MAM84)
— Active Particles : Emerging Behavior in Collective Dynamics (cours FSMP)

5.6 Description des UE

<u>**Cours de base**</u> **(12 ECTS) (1er semestre)**

Objectifs de l'UE : Fournir un socle homogène de connaissance. L'accent est mis sur les outils mathématiques communs et parfois indispensables àtoutes les Majeures, tout en sensibilisant les étudiants aux enjeux de la modélisation et du calcul scientifique.

Thèmes abordés : Cette UE est constituée de cinq cours :

— Equations aux dérivées partielles
— Optimisation et analyse fonctionnelle
— Probabilités pour les mathématiques de la modélisation
— Méthodes numériques pour les EDP instationnaires
— Espace de fonctions

Ces cours se déroulent sur une période de six semaines, chacun des modules étant enseigné sur un jour (cours de 3 heures le matin + TD de 2 ou 3h l'après-midi). L'étudiant devra choisir un minimum de 4 modules parmi les 5 pour valider cette UE. Le détail des modules est donné ci-après.

B001 **Equations aux dérivées partielles (1er semestre)**
Prof. : Fabrice Bethuel

Objectifs de l'UE :
Les équations aux dérivées partielles (EDP) apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux problèmes en physique, biologie économie ou ailleurs. Sur de nombreux points, elles semblent géneraliser au contexte multi-dimensionnel les équations différentielles ordinaires.
L'approche proposée dans la littérature mathématique peut cependant surprendre l'étudiant qui désire s'y initier : les méthodes d'inspiration très variées y abondent, le plus souvent adaptées à des cas particuliers, de sorte qu'il est difficile d'imaginer

qu'une théorie unifiée puisse s'en dégager. Il faut admettre que ce sentiment de confusion correspond pour une certaine part à une réalité incontournable : les phénomènes modélisées sont par nature si différents qu'il est presque impensable de les faire entrer dans une même et seule catégorie. Cependant, l'étudiant plus avancé dans leur étude (par exemple un étudiant en fin d'année de la spécialité) se rend vite compte que, dans l'univers infini de toutes les EDP imaginables, seuls un petit nombre retient vraiment notre attention, et qu'un nombre restreint de catégories d'EDP et de phénomènes apparaît. Chacune de ces catégories présente alors une unité propre. De manière peut-être surprenante, ces principales catégories étaient pour la plupart connues et étudiées depuis le XIXème siècle, voire avant. Diverses méthodes avaient alors étaient proposées, comme la méthode de séparation des variables ou la décomposition de Fourier, et des propriétés essentielles, comme le principe du maximum, identifiées. La théorie connut une véritable explosion au XXème siècle grâce à l'apport de l'analyse fonctionnelle. Ces diverses approches continuent de coexister et de se féconder dans les travaux modernes.

Le but de ces notes est de présenter de manière aussi concise que possible quelque types importants d'équations, et de voir comment les notions mentionnées précédemment apparaissent naturellement. Les questions fondamentales concernent, comme pour les équations aux différentielles ordinaires

— l' existence de solution
— l'unicité des solutions

éventuellement en fonctions de données aux limites prescrites. Cependant, des questions nouvelles et propres aux EDP apparaissent aussi, comme la régularité des solutions. Comme pour les équations ordinaires voire encore beaucoup plus, des propriétes qualitatives, comme des bornes sur diverses quantités ponctuelles ou intégrales sont fondamentales. Ces dernières s'avèrent souvent cruciales pour établir l'existence même des solutions : c'est la méthode des estimations a priori. dans cette méthode, on commence par étudier les solutions, les résultats obtenus permettent parfois grâce à diverses techniques d'en déduire l'existence.

L'étude des EDP fait appel à presque toutes les branches de l'analyse. C'est pourquoi, nous effectuerons certains rappels dans des Appendices séparées, par exemple l'analyse vectorielle, la théorie de Fourier, ou la la théorie des équations différentielles ordinaires. Les principaux résulats d'analyse fonctionnelle que nous utiliserons seront rappelés, mais admis. Il font l'objet d'un autre des cours de base de cette spécialité.

Nous étudierons deux grandes classes d'équations :

— les équations d'evolutions : le temps, qui est l'une des variables, joue un rôle particulier,
— les équations stationnaires,

qui sont parfois des états limites d'équations d'évolution.

Nous ferons ensuite la distinction, dans chacune des classes précédentes, entre

— les équations linéaires qui vérifient le principe de superposition et
— les équations non linéaires (qui ne le vérifient pas).

Le principe de superposition affirme que toute combinaison linéaire de ses solutions est également une solution. Lorsque l'équation vérifie un tel principe, on peut alors décomposer une solution en solution plus simple. C'est sur ce principe que repose la méthode des solutions fondamentales, qui même parfois à des formules explicites, rendant du coup leur étude plus aisée. Certaines de ces formules seont étudiées au cours d'exercices.

B002 **Optimisation et analyse fonctionnelle (1er semestre)**
Prof. : Hervé Le Dret

Objectifs de l'UE :
L'optimisation est un sujet vaste, qui intervient dans de nombreux sujets anciens ou d'actualité en recherche mathématiques, en allant de questions théoriques jusqu'à certaines beaucoup plus appliquées. Nous partirons de multiples exemples pour motiver les questions générales de l'optimisation, pour ensuite entrer dans les détails, ce qui nous fera aborder des sujets d'analyse fonctionnelle, de calcul différentiel, et d'analyse numérique.
Thèmes abordés :
- Exemples historiques (problème isopérimétrique, Brachistochrone...) et plus modernes (transport optimal, EDP variationnelles, image, géométrie spectrale...)
- Espaces de Banach, dualité, convergence faible
- Convexité, existence de minimiseurs
- Calcul différentiel, conditions d'optimalité, équations d'Euler-Lagrange
- Algorithmes numériques d'optimisation

Bibliographie :

- J. Bonnans, Optimisation continue, Mathématiques appliquées pour le Master / SMAI, Dunod, Paris (2006).
- J. Nocedal, S. Wright, Numerical optimization. Second edition. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York (2006).

B003 **Probabilités pour les mathématiques de la modélisation (1er semestre)**
Prof. : P. Monmarché

Objectifs de l'UE :
Les probabilités interviennent dans les mathématiques de la modélisation et les EDP (et vice-versa) dans de nombreux contextes, soit que l'aléatoire intervienne explicitement dans le modèle, ou qu'un modèle déterministe dispose d'une représentation probabiliste, ou que des méthodes numériques impliquent des algorithmes stochastiques ou statistiques. Le but de ce cours est de fournir une boîte à outil de base en probabilités, dans une optique pragmatique. On renverra régulièrement à des références pour les fondations théoriques, en se concentrant sur des exemples et applications.
Prérequis :
Pas de prérequis.
Thèmes abordés :
- Rappels généraux de probabilités
- vecteurs gaussiens
- mouvement Brownien
- Processus de diffusion
- ergodicité

B004 **Méthodes numériques pour les EDP instationnaires (1er semestre)**
Prof. : Bruno Després

Objectifs de l'UE :
On peut considérer que les méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles (EDP) d'évolution s'appuient sur deux piliers. Le premier pilier en est l'analyse fonctionnelle et la théorie des espaces fonctionnels, le second pilier s'appuie sur les modèles d'EDP et leurs liens avec la modélisation des phénomènes réels. Cette discipline est liée de très près également au développement des moyens de calculs informatiques.
Pour autant la construction et l'analyse numérique de méthodes numériques efficaces pour les EDP d'évolution s'appuient sur des règles propres qui forment l'objet de ces notes pour le cours de base du Master 2-Mathématiques de la Modélisation.
Prérequis :
Pas de prérequis.
Thèmes abordés :
- Modèles et cadre fonctionnel.
- Construction des méthodes numériques en 1D et 2D : DF (Différences Finies), VF (Volumes Finis) et comparaison avec les EF.
- Convergence des DF : stabilité, consistance, convergence et théorème de Lax. Applications : transport, maillage non uniforme, données peu régulières, schémas semi-lagrangiens,...
- Convergence des VF (en 2D) pour le transport et pour la diffusion : données dans H1 ou BV.
- Schémas non linéaires : critère TVD et convergence pour le transport.

B005 **Espaces de fonctions (1er semestre)**
Prof. : Jean-Yves Chemin

Objectif de l'UE : Le but de ce cours est de présenter les espaces fonctionnels de base utilisés en EDP et leurs propriétés.
Prérequis :
Pas de prérequis.
Thèmes abordés :
- espaces L^p (avec convolution et inégalité d'Young), espaces L^pL^q
- espaces de Sobolev : propriétés de base, injections, prolongement, trace
- séries de Fourier sur le tore plat

Cours fondamentaux (18 ECTS) (1er semestre)

MAM99 **PDE and randomness : a few examples (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Antoine Gloria
This course will be given in English.

Aim :
The interaction between partial differential equations and probability is very active research field with fundamental breakthroughs in the last fifteen years.
Let us give three examples.

- SPDEs (S for stochastic) : equations with random forcing. The forcing term is a random noise. The difficulty to analyze such equations comes from the poor regularity of a random noise (think of the erratic trajectory of a random walker). At fixed randomness (that is, realisation), the SPDE (which is then nothing else than a deterministic PDE) is not necessarily well-posed because we are led to (formally) multiply Schwartz distributions. The main question is thus to define a suitable notion of solutions.
- PDEs with random initial data. Some evolution PDEs may lead to blow up phenomena in finite time for well (or badly) chosen initial conditions (as for ODEs). Is this behavior generic ? This question amounts to endowing the space of initial conditions with a probability structure and a probability measure for which the evolution equation is well-posed for almost all initial conditions.
- PDEs with random coefficients. In this case, the random field enters the very definition of the operator (modelling for instance a heterogeneous and random diffusion coefficient). The questions one is interested in do not usually concern existence (which is often standard), but rather ergodic-type questions : what is the statistics of the solution given that of the random field ? What do the solutions look like at large scales (that is, with respect to the characteristic length of the random field). In these three examples of very different natures, the difficulty of the analysis comes from the nonlinearity of the interaction between the differential operator and the randomness (due to the nonlinearity of the equation in the first two cases eg).

The aim of this course is to make a short tour of the interaction between PDEs and randomness by treating an example (as simple as possible) of each type.

Prerequisit :
Course B003 (or equivalent)

MAM97 **Analyse théorique et numérique des équations hyperboliques (6 ECTS) (1er semestre)**

Prof. : Amaury Hayat et Alexandre Ern

L'objectif de ce cours :
Les équations hyperboliques sont un type d'équations aux dérivées partielles qui caractérisent les phénomènes qui se propagent à vitesse finie. C'est le cas, par exemple, des fleuves, des ondes, du trafic routier et de nombreux flux en général. Elles sont présentes partout dans la nature et dans les applications humaines, de la mécanique à la physique en passant par l'économie. Ce cours est une introduction à leur étude d'un point de vue théorique et numérique.

D'un point de vue théorique, nous introduirons la notion d'hyperbolicité, puis les caractéristiques et leur utilisation pour déterminer des solutions. Nous verrons que, lorsque les équations sont non linéaires, il n'y a parfois pas de solutions classiques même lorsque la condition initiale est très régulière. Nous définirons ensuite les solutions faibles et nous nous intéresserons à la notion de chocs et à leur propagation selon les relations de Rankine-Hugoniot. Nous verrons que ces solutions ne sont pas uniques et, pour retrouver l'unicité, nous introduirons la notion de solution entropique. Nous étudierons cette notion d'abord dans le cas scalaire, puis dans le cas de systèmes d'équations hyperboliques.

D'un point de vue numérique, nous étudierons la notion de problème de Riemann et de schéma numérique conservatif. Dans un premier temps, nous mettrons ces notions en oeuvre dans un contexte de discrétisation en espace par des méthodes de différences finies et volumes finies et une marche ne temps de type Euler explicite. Cela nous conduira à des schémas classiques de la littérature comme le schéma de Godunov ou celui de Lax-Friedrichs. Puis, nous verrons comment étendre ces idées dans un contexte éléments finis. Enfin, nous étudierons quelques techniques permettant la montée en ordre des schémas tout en assurant que les solutions discrétes restent dans un ensemble admissible (p.ex. des densités positives, etc.)

Enfin, si le temps le permet, nous ferons une ouverture vers un problème de recherche concret : la modélisation et le contrôle du trafic routier.

MAM03 **Mathematical methods in Biology (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Luis Almeida

L'objectif de ce cours :
The aim of this course is to present examples of mathematical modeling in the life sciences both through traditional courses and through presentations by researchers in this area and to introduce some useful tools for pursuing studies in this field.
Thèmes abordés : the subjects covered include

- Population Dynamics - single species and interaction between species. Structured populations.
- Mathematical epidemiology.
- Reaction-diffusion equations and front propagation in Ecology and Biology.
- Control of ecological and biological systems.

MAM12 **Introduction aux EDP d'évolution (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Katharina Schratz

Prérequis :
Analyse fonctionnelle de M1.
Objectif :
Ce cours est une introduction aux EDP d'évolution. On va discuter des aspects théoriques (résolution des équations) et numériques (discrétisation, analyse d'erreur).
Thèmes abordés :

- Résolution des équations de transport : champs réguliers, données peu régulières, lois de conservation, et quelques aspects de leur discrétisation numérique.
- Résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles : solutions faibles et fortes, stabilité de type fort-faible, discrétisation par des méthodes semi-implicites.
- Résolution des équations de SchrÃűdinger linéaire et non linéaire : données régulières, estimations de Strichartz, discrétisation par des méthodes de splitting et l'analyse d'erreur.

Le cours sera donné en anglais.

MAM02 **Optimisation continue (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Antonin Chambolle (PSL, Dauphine)

Objectifs de l'UE :
This course will cover the bases of continuous, mostly convex optimization. Optimization is an important branch of applied industrial mathematics. The course will mostly focus on the recent development of optimization for large scale problems such as in data science and machine learning. A first part will be devoted to setting the theoretical grounds of convex optimization (convex analysis, duality, optimality conditions, non-smooth analysis, iterative algorithms). Then, we will focus on the improvement of basic first order methods (gradient descent), introducing operator splitting, acceleration techniques, non-linear ("mirror") descent methods and (elementary) stochastic algorithms.

MAM29 **Calcul haute performance pour les méthodes numériques et l'analyse des données (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Laura Grigori et Emile Parolin

Objectifs de l'UE :
L'objectif de l'UE est de donner les notions de base permettant de concevoir des algorithmes parallèles efficaces en calcul scientifique ainsi qu'en analyse de grands volumes de données. Les opérations considérées correspondent aux étapes les plus coûteuses se trouvant au coeur de nombreuses simulations numériques complexes. Les aspects calcul parallèle en analyse de grands volumes de données seront étudiés à travers le calcul tensoriel en grande dimension. Le cours donnera aussi une introduction aux algorithmes les plus récents en algèbre linéaire numérique à grande échelle, une analyse de leur stabilité numérique, associée à une étude de leur complexité en terme de calcul et communication.
Thèmes abordés :
- Introduction au calcul parallèle : survol des machines parallèles et modèles de programmation, introduction aux routines MPI pour programmer une machine parallèle, approches pour identifier le parallèlisme dans les simulations numériques, parallélisme en temps et en espace.
- Algorithmes parallèles et leur stabilité numérique pour des opérations en algèbre linéaire numérique : méthodes d'orthogonalisation, problèmes aux moindres carrés, résolution des systèmes linéaires.
- Aspects calcul parallèle en analyse de données, passage du calcul matriciel aux tenseurs en grande dimension.
- Une introduction aux algorithmes parallèles developpés ces dernières années minimisant les communications dans une machine parallèle, compromis parallélisation-stabilité.

Des travaux pratiques sur machines auront lieu permettant aux étudiants de gagner une expertise en programmation parallèle.

MAM30 **Des EDP à leur résolution par éléments finis (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Xavier Claeys

Prérequis :
Bases de programmation dans un langage compilé (C, C++, Fortran, Java,...) et en analyse hilbertienne. Bases solides d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.
Objectif :

Ce cours proposera un tour d'horizon des enjeux et problématiques logicielles intervenant dans la résolution d'une EDP elliptique en dimension 2 et 3, en s'appuyant sur le langage C++.
Thèmes abordés :
Programmation orientée objet, programmation générique et polymorphisme pour l'écriture de code facilement réutilisable. Structure de données pour les matrices creuses et pour la représentation des maillages simpliciaux. Visualisation et appels de bibliothèques de calcul scientifique. Assemblage des matrices éléments finis, préconditionnement et résolution par gradient conjugué.

MAM34 **EDP et modélisation (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Frédéric Legoll

Objectifs de l'UE :
L'objectif de ce cours est de passer en revue un certain nombre de modèles importants issus des sciences de l'ingénieur, et de comprendre comment modéliser ces phénomènes grâce à des EDP. Il s'agit donc de faire le lien entre des phénomènes physiques fréquents dans les applications (diffusion, transport, ...) et la manière dont ceux-ci sont pris en compte dans un modèle mathématique. Nous présenterons donc les grandes classes de modèles (en s'en tenant à des exemples simples et concrets), et nous renvoyons à d'autres cours pour l'introduction du cadre mathématique nécessaire à leur analyse.
Thèmes abordés :
Le cours se compose de trois grandes parties.

La première partie est consacrée aux problèmes de diffusion, transport et réaction. Nous commencerons par l'origine microscopique (via le mouvement brownien) des phénomènes de diffusion. Ceci permettra d'obtenir l'équation de la chaleur. Ecrire le noyau de Green de cette équation permettra de comprendre ses effets dissipatifs et l'existence d'une "flèche du temps". Nous verrons ensuite des problèmes melant diffusion et transport (avec le cas particulier où le terme de transport domine). Les aspects régularisants de l'opérateur Laplacien seront ensuite mis en lumière. Cette première partie se terminera avec des exemples d'équations des ondes, et la mise en exergue des différences qualitatives entre ces modèles et les équations paraboliques telles que l'équation de la chaleur.

La seconde partie du cours est consacrée à la physique du continuum, en commençant par la notion de bilan physique (lois de conservation). On présentera les formalismes eulérien et lagrangien.

En utilisant le formalisme eulérien, on s'intéressera à divers éléments de mécanique des fluides : lois constitutives (fluides Newtoniens, fluides polymériques), adimensionalisation et régimes (nombre de Mach, nombre de Reynolds, système de Stokes), conditions aux limites (lois de paroi, ...).

En utilisant le formalisme lagrangien, on s'intéressera à divers éléments de mécanique des solides : élasticité, modèles avec coefficients aléatoires (pourquoi, comment ?).

Dans la troisième partie, on abordera les modèles à l'échelle atomique, qui s'écrivent, dans un premier temps, sous la forme d'équations différentielles ordinaires, les équations de Newton. Nous verrons plusieurs formalismes (lagrangien, hamiltonien, ...)

pour décrire ces équations. Nous montrerons comment l'introduction du formalisme de Liouville permet de prendre en compte les effets extérieurs, ce qui nous permettra d'aller vers les équations différentielles stochastiques (équations de Langevin) et les modèles cinétiques.

Plusieurs aspects de modélisation seront discutés tout au long du cours, en fonction des exemples considérés :

- signification physique des conditions aux limites
- réduction de modèles, passage d'un modèle à un autre dans certains régimes : en mécanique des fluides (équations de Saint-Venant, du système de Stokes à l'équation de Darcy, lois de paroi effectives, etc.), en mécanique des solides (passage d'une modélisation atomistique à une modélisation de continuum), etc.
- modélisation multi-physique, couplant différents modèles pouvant éventuellement être écrits dans des langages différents (interaction fluide-structure, etc.) Tout au long du cours, on montrera des simulations numériques pour illustrer le comportement des différents modèles.

Les séances de cours seront complétées par des interventions extérieurs, au cours desquelles des spécialistes de domaines particuliers (mécanique quantique, ...) non abordés dans le coeur du cours viendront présenter les aspects modélisation pertinents de leur discipline.

MAM35 **Méthodes numériques probabilistes (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Julien Reygner

Objectifs de l'UE :
Ce cours est une introduction aux probabilités avec deux objectifs : comprendre le langage des probabilités qui intervient dans de nombreux modèles (physique statistique, mécanique quantique, chimie, biologie, finance) et présenter quelques méthodes numériques probabilistes qui peuvent notamment être utilisées pour résoudre des problèmes déterministes (résolution d'équations aux dérivées partielles, calcul de la première valeur propre d'un opérateur).
Prérequis :
Cours B003.
Thèmes abordés :
On s'attache a présenter les concepts essentiels fondant les méthodes de Monte Carlo, les chaînes de Markov, les processus de diffusion et leurs liens avec les équations aux dérivées partielles. Plusieurs applications illustrent le cours : en physique statistique (méthodes d'échantillonnage d'une mesure de Boltzmann-Gibbs), en dynamique moléculaire (énergie libre, formule de Jarzynski), ou en finance (pricing d'option). Le plan du cours est le suivant : Variables aléatoires : espace probabilisé, notions de convergence, théorèmes limites, méthodes de Monte Carlo et de réduction de variance. Chaînes de Markov : équations de Kolmogorov, co.mportement asymptotique (ergodicité), méthodes Markov Chain Monte Carlo. Processus de diffusion : processus aléatoires et mouvement brownien, intégrales stochastiques et calcul d'Itô, équations différentielles stochastiques, liens avec les équations aux dérivées partielles (formules de Feynman-Kac et équation de Fokker-Planck), inégalité de Poincaré et comportement asymptotique.

MAM36 **Méthodes d'approximation variationnelle des EDP (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Yvon Maday

Prérequis :
cours de niveau M1 en analyse fonctionnelle et analyse numérique.
Objectifs de l'UE :
analyse numérique des techniques d'approximations des EDP sous formes variationnelles.
Thèmes abordés :
Un grand nombre d'équations aux dérivées partielles, linéaires ou non linéaires, peuvent se mettre sous forme variationnelle. Du point vue de l'analyse fonctionnelle, les formulations variationnelles offrent un cadre utile pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de ces équations. Du point de vue de l'approximation, les formulations variationnelles se prêtent bien aux méthodes de type Galerkin qui sont un moyen efficace et performant pour approcher ces solutions. Les thèmes abordés dans ce cours sont : l'apprentissage de la mise sous forme variationnelle des équations elliptiques, en particulier l'équation de Laplace et le système de Stokes. l'application de méthodes de type Galerkin - la méthodes des éléments finis, les méthodes spectrales et de bases réduites - à la discrétisation de ces équations. On intéressera non seulement à la construction des méthodes et à leur propriétés de convergence a priori, mais aussi aux algorithmes de résolution ainsi que des techniques de raffinement adaptatif et d'estimation a-posteriori.

MAM47 **Equations elliptiques (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Hoai-Minh Nguyen

Prérequis : analyse fonctionnelle de niveau M1.
Objectifs de l'UE :
Le but de ce cours est d'introduire quelques techniques parmi les plus utilisées pour construire et étudier des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires et non linéaires.
Thèmes abordés :
- équations linéaires :
  — Généralités, propriétés des fonctions harmoniques.
- Méthodes variationnelles :
  — Méthode directe du calcul des variations, quasi-convexité, propriétés de symétrie, lemme du col, inégalités variationnelles.
- Propriétés de régularité :
  — Le principe du maximum sous ses diverses formes (Hopf, Harnack, symétrie...).
  — L'inégalité de Caccioppoli, la théorie de Schauder et la théorie de De Giorgi-Nash-Moser.
  — Les estimations de Calderón-Zygmund.

MAM53 **Contrôle en dimension finie et infinie (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Emmanuel Trélat

Objectifs de l'UE :

La théorie du contrôle est une branche des mathématiques permettant de contrôler un système sur lequel on a une action, une commande (comme une voiture, une fusée, une réaction chimique, un système biologique, un marché financier, etc). Le problème de contrôlabilité consiste alors à déterminer une loi de contrôle permettant d'emmener, de guider ce système vers un certain état final désiré. L'objectif de ce module est de donner des résultats d'analyse permettant d'aborder la contrôlabilité, le contrôle optimal, la stabilisation, et l'observabilité de systèmes linéaires et non linéaires.
On parle de contrôle optimal lorsque, en plus de contrôler un système (i.e., de le guider vers un état final), on veut de plus minimiser un certain critère âĂŞ par exemple, minimiser une consommation, maximiser un rendement. On parle de stabilisation lorsqu'on veut construire un feedback, i.e. un contrôle dépendant de l'état, afin de rendre le système autonome, ou bien robuste aux perturbations extérieures. On parle d'observabilité lorsqu'on cherche à reconstruire l'état complet d'un système à partir d'observations partielles de cet état.
De nombreux exemples concrets seront donnés, dans diverses disciplines (mécanique, biologie, maths financières, électronique, etc).
Prérequis :
Aucun.
Thèmes abordés :
- Contrôlabilité : systèmes linéaires autonomes (Kalman), instationnaires (Gramienne). Systèmes non linéaires : résultats de contrôlabilité locale.
- Contrôle optimal : principe du maximum de Pontryagin. Cas particulier des systèmes linéaires. Théorie linéaire-quadratique, équation de Riccati, régulation. Systèmes non linéaires, exemples et exercices. Applications en maths bios, en mécanique, en maths financières.
- Stabilisation : systèmes linéaires (placement de pôles), stabilisation locale pour des systèmes non linéaires. Théorie de Lyapunov, Lasalle. Méthode de Jurdjevic-Quinn. Applications en aérospatiale, en maths bios.
- Introduction au contrôle en dimension infinie : semi-groupes, opérateur de contrôle, admissibilité, observabilité. Exemples : chaleur, ondes, SchrÃűdinger. Méthode HUM. Etude de quelques EDP non linéaires élémentaires.

MAM63 **Introduction aux EDP stochastiques (6 ECTS) (1er semestre)**
Prof. : Anne de Bouard

Objectifs de l'UE :
Le but du cours est d'introduire les méthodes de base pour l'étude mathématique d'EDP (paraboliques) faisant intervenir des termes aléatoires qui, parce qu'ils modélisent des phénomènes qui se produisent à des échelles de temps beaucoup plus petites que les phénomènes déterministes, sont des bruits blancs en temps. De telles équations interviennent naturellement en physique (par exemple, mais pas seulement, pour modéliser la turbulence dans certains fluides), en biologie (dynamique des populations, neurosciences, ...) ou en finance.
Thèmes abordés :
Après des rappels de base en probabilités et processus stochastiques, on introduira le mouvement brownien, puis le calcul d'Ito en dimensions finie et infinie. On montrera

alors des résultatsd'existence de solutions d'EDP stochastiques forcées par un bruit blanc. On étudiera ensuite, suivant le temps restant, le comportement des solutions en temps infini (existence d'une mesure invariante, ergodicité, ...). Aucun prérequis n'est demandé en probabilités.

Références :

— G. Da Prato, J. Zabczyk, Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Cambridge University Press
— Voir aussi le cours de Martin Hairer : An Introduction to Stochastic PDEs (https://arxiv.org/pdf/0907.4178.pdf)

MAM28 Modèles cinétiques et limites hydrodynamiques (6 ECTS) (1er semestre)

Prof. : François Golse

MAM70 Equations structurées en biologie (6 ECTS) (1er semestre)

Prof. : Benoit Perthame

Thèmes abordés :

Depuis le célèbre modèle de Kermack-McKendrick en épidémiologie et la structure d'âge, de nombreuses équations structurées ont été introduites pour décrire divers phénomènes tels la répartition de taille d'organisme, la distribution de récepteurs d'une cellule. On peut à la fois parler de paramètre physiologiques (se modifiant au cours de la vie de l'organisme) ou phénotypique (hérité à la naissance). L'étude de tels modèles utilise des outils que l'on présentera

— éléments propres et théorème de Krein-Rutman
— entropie relative
— méthodes asymptotiques
— méthode de Doeblin

Sur quelques exemples, que l'on reliera à d'autres cours de mathématiques pour la biologie, on illustrera également les

— applications à la propagation d'épidémies
— approches de discrétisation et méthodes numériques
— perturbations singulières et méthodes asymptotiques

Références :

[1] Benoit Perthame. Transport equations in biology. Birkhauser (2007).
[2] Keener, J. and Sneyd, J. Mathematical physiology. Interdisciplinary Applied Mathematics, 8. Springer-Verlag, New York, 1998.
[3] Edelstein-Keshet, L. Mathematical models in biology, 2nd edition. (2005).
[4] Cushing, J.M. An Introduction to Structured Population Dynamics. CBMS- NSF, Regional conference series in applied mathematics, SIAM (1998).

MAM71 Méthodes du premier ordre pour l'optimisation non convexe et non lisse (6 ECTS) (1er semestre)

Prof. : Pauline Tan

Objectif :

Ce cours explore la vaste théorie de l'optimisation non convexe et non lisse, par le biais des méthodes dites du premier ordre. Une attention particulière sera consacrée aux problématiques liées à l'optimisation sur données en grande dimension.

Contenu :
- Fonction à valeurs sur la droite réelle étendue, sous-différentiabilité, condition d'optimalité du premier ordre
- Méthodes de gradient (explicite, implicite), opérateur proximal, algorithme du point proximal
- Dualité de Lagrange et de Fenchel, conditions de Karush, Kuhn et Tucker
- Stratégies d'éclatement : forward-backward splitting, éclatement de Dykstra, méthode de Douglas-Rachford
- Optimisation par blocs : minimisations alternées (block coordinate descent), descentes (proximales) alternées
- Algorithmes primaux-duaux : méthode des directions alternées, algorithme de Chambolle-Pock
- Ouverture : variantes inertielles, pré-conditionnement, distances de Bregman

MAM17 **Théorie des jeux : applications en économie et en finance (6 ECTS) (1er semestre) (module externe M2 MASEF)**
Prof. : Miquel Oliu Barton

Objectifs de l'UE :
La théorie géométrique du contrôle étudie, du point de vue qualitatif et géométrique, les propriétés des systèmes dynamiques dont certains paramètres peuvent être contrôlés en fonction du temps. L'objectif du cours est d'introduire les notions fondamentales de cette théorie et de montrer comment elles peuvent être appliquées à des systèmes issus d'applications ou d'autres théories mathématiques.
Thèmes abordés :
- Accessibilité de systèmes non linéaires et contrôlabilité de systèmes symétriques (théorèmes de Krener et Chow).
- Contrôlabilité de systèmes non linéaires (flots récurrents, condition forte de HÃűrmander, convexification, systèmes invariants sur groupes de Lie avec applications à la contrôlabilité de systèmes quantiques).
- Contrôle optimal (existence par le théorème de Filippov, principe de maximum de Pontriaguine, trajectoires anormales et singulières).
- Optimisation du temps (introduction aux synthèses optimales en dimension deux, applications aux systèmes quantiques).
- Systèmes symétriques avec coût quadratique : introduction à la géométrie sous-riemannienne.

MAM22 **Some Mathematical Methods for Neurosciences (6 ECTS) (1er semestre) (module externe M2 MVA)**
Prof. : Etienne Tanré & Romain Veltz

Objectifs de l'UE :
Nous présentons dans ce cours quelques outils mathématiques qui interviennent de manière systématique dans de nombreux problèmes de modélisation en neurosciences.
En particulier, nous mettons l'accent sur les invariants déterministes et stochastiques que ces modèles peuvent produire.

Sans trahir la rigueur mathématique, le cours s'efforcera de mettre en valeur l'applicabilité aux neurosciences des concepts présentés.
Le cours est accompagné de séances d'exercices.
Prérequis : une bonne connaissance des équations différentielles ordinaires et des processus de Markov.
Mode de fonctionnement : Examen final écrit.

MAA06 **Statistiques et Apprentissages (6 ECTS) (1er semestre) (module externe M2 STAT)**
Prof. : Irina Kourkova

Objectifs de l'UE :
Ce cours vise à donner aux étudiants les bases fondamentales du raisonnement et de la modélisation statistique, tout en présentant une ouverture vers des thématiques de recherche contemporaines.
L'accent sera particulièrement mis sur l'utilisation pratique des nouveaux objets rencontrés.
Prérequis :
Une bonne connaissance du calcul des probabilités et de l'algèbre linéaire.
Thèmes abordés :
- Rappels de probabilités, estimation ponctuelle, estimation par intervalles, tests.
- Modèle linéaire : estimation, intervalles de confiance et tests.
- Introduction à l'apprentissage statistique et à la classification supervisée.
- Minimisation du risque empirique, théorème de Vapnik-Chervonenkis.
- Règles de décision non paramétriques (méthode des k plus proches voisins et arbres de décision).
- Quantification et classification non supervisée.

Cours spécialisés (12 ECTS) (2ème semestre)

MAM10 **Théorie spectrale et méthodes variationnelles (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Eric Cancès & Mathieu Lewin

Thèmes abordés : La théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints a de nombreuses applications en mathématiques, notamment dans le domaine des équations aux dérivées partielles (EDP). Dans ce cours, nous présenterons les détails de cette théorie, que nous illustrerons par divers exemples intervenant dans la théorie et la simulation numérique des EDP (Laplaciens de Dirichlet et de Neumann par exemple). Dans une deuxième partie du cours, nous verrons que la combinaison de techniques spectrales et de méthodes variationnelles permet d'obtenir des résultats intéressants sur des problèmes elliptiques linéaires et non linéaires.
Nous illustrerons cette approche sur des problèmes issus de la mécanique quantique, extrêmement utilisés dans les applications. Nous étudierons en particulier l'équation de Schrödinger à N corps (EDP linéaire en dimension 3N), et ses approximations de champ moyen donnant lieu à une équation de Schrödinger non linéaire en dimension 3. Les éléments de base de la mécanique quantique seront présentés, mais aucune connaissance physique n'est requise pour suivre le cours.

MAM21 **Méthodes de Galerkine discontinues et applications (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Alexandre Ern

Objectifs de l'UE :
Il s'agit d'une part de comprendre les fondements théoriques de la méthode et d'autre part d'étudier ses applications (advection-diffusion, mécanique des fluides, lois de conservation).
Prérequis :
Il est souhaitable de connaître la méthode des éléments finis de Lagrange conformes et l'approximation variationnelle des EDP.
Thèmes abordés :
l'UE est organisée comme suit
— formulation et analyse de la méthode pour l'équation de transport stationnaire, liens avec la méthode des volumes finis
— formulation et analyse de la méthode pour la diffusion et l'advection-diffusion, notion de gradient discret
— applications a la mécanique des fluides stationnaires : équations de Stokes et de Navier-Stokes (in)compressibles
— lois de conservation linéaires et non-linéaires : notion de flux, analyse de convergence, applications

MAM26 **Modèles mathématiques et méthodes numériques pour la simulation en hémodynamique (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Miguel Fernández

Prérequis de l'UE :
Il est recommandé d'avoir suivi un cours sur les EDPs et des bases d'approximation numérique (éléments finis) ainsi que de posséder des notions de programmation.
Objectifs de l'UE :
Acquérir des connaissances théoriques et un savoir-faire numérique sur des EDP de type Stokes, Navier-Stokes et sur les modèles d'interaction fluide-structure.
Thèmes abordés : Ce cours abordera quelques problèmes rencontrés dans la simulation numérique d'écoulements sanguins, dans leur analyse mathématique et sur leur simulation numérique. Plusieurs types de modèles représentant différentes niveaux de complexité physique seront présentés :
— équations de (Navier-)Stokes : résultats théoriques, méthodes numériques, discrétisation par éléments finis.
— Interaction fluide-structure : résultats théoriques, méthodes numériques et schémas de couplage
Les développements numériques seront faits à l'aide du logiciel FreeFem++, auquel les étudiant-e-s seront initié-e-s dans des séances de TP dédiées.

MAM27 **Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'océanographie, des risques naturels et de l'énergie (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Jacques Sainte-Marie et Nina Aguillon

Objectifs :

De la modification de la dynamique océanique à la fréquence des évènements climatiques extrêmes, les conséquences visibles du changement climatique nécessitent des modèles et des outils mathématiques pour la quantification, la prédiction ou l'atténuation de ces événements.

Même si les phénomènes sont multi-physiques, multi-physiques et se déroulent sur de grandes échelles spatiales et temporelles, il y a une grosse demande de modèles de complexité réduite par rapport aux équations de Navier-Stokes pour l'étude de phénomènes géophysiques tels : les risques naturels, les impacts du changements climatiques, les énergies marines...

Tout au long de ce cours, on s'intéresse à la dérivation de modèles simplifiés (par rapport aux équations de Navier-Stokes à surface libre) et à leur analyse (numérique) ainsi qu'à leur simulation. A noter que les modèles étudiés ont généralement un caractère hyperbolique.

Prérequis :
Niveau de Master M1 en mathématiques. Le cours MAM ? ? ? ? sur les équations hyperboliques est conseillé.

Thèmes abordés :
Le but de ce cours est d'étudier des modèles d'écoulements de fluides complexes décrits par des EDP hyperboliques (ou à dominante hyperbolique) dans le contexte de l'océanographie, des risques naturels, de l'écologie et des énergies marines et renouvelables. Une partie importante du cours est consacrée à la dérivation rigoureuse des modèles, à leur analyse (numérique) et au développement de schémas numériques satisfaisant des propriétés de stabilité.

Les points importants du cours sont :
- Dérivation des équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes
- Propriétiés du système de Saint-Venant
- Lois de conservation hyperbolique et termes sources
- Analyse numérique des systèmes hyperboliques
- Schémas numériques (classiques et sophistiqués) pour l'approximation numérique des modèles
- Formalisme cinétique

MAM38 Méthodes modernes et algorithmes pour le calcul parallèle (6 ECTS) (2ème semestre)

Prof. : Frédéric Nataf

Objectifs :
Le calcul parallèle est devenu incontournable en calcul scientifique dans les mondes académiques et industriels. Il s'agit de donner aux étudiants les outils d'analyse numérique permettant de comprendre et analyser les méthodes de décomposition de domaine pour les équations scalaires et les systèmes d'équation aux dérivées partielles ainsi que pour la matrice laplacienne en théorie des graphes. Les méthodes seront aussi illustrées par des simulations en FreeFem++.

Thèmes abordés :
- Analyse d'une méthode de Schwarz avec recouvrement pour un opérateur elliptique

— Cadre abstrait, lemme de l'espace fictif
— Nécessité et construction d'un espace grossier, méthodes à deux niveaux
— Conditions d'interface optimisées

MAM50 **Méthodes mathématiques et analyse numérique pour la simulation moléculaire. (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Gabriel Stoltz

Prérequis : B003 et MAM35
L'objectif de ce cours : Ce cours est une introduction à la simulation moléculaire, qui est la version computationnelle de la physique statistique. Ces techniques numériques sont couramment utilisées dans de nombreux domaines d'application (physique, chimie, biologie computationnelle, science des matériaux), mais également en big data (échantillonnage de mesures de probabilités en dimension grande pour des modèles d'inférence statistique). Elles sont toutefois encore trop peu étudiées d'un point-de-vue mathématique.
Thèmes abordés : Après une brève introduction aux concepts les plus importants de la physique statistique (notamment la description des macroétats d'un système par une mesure de probabilité), on commence par présenter l'échantillonnage des états à énergie constante par l'intégration en temps long de la dynamique Hamiltonienne et sa discrétisation en temps (théorie de l'intégration géométrique).
On se tourne ensuite vers la partie principale du cours : l'échantillonnage des mesures de Boltzmann-Gibbs par différentes techniques, notamment chaines de Markov et équations différentielles stochastiques. On s'attache à prouver la convergence des méthodes employées par des arguments relevant le plus possible de l'analyse (par exemple, méthode de Lyapunov à la Hairer-Mattingly pour les chaines de Markov ; inégalités fonctionnelles, hypoellipticité, théorie de l'hypocoercivité, etc, pour les équations différentielles stochastique de type Langevin).
On considère également l'analyse numérique des erreurs engendrées par la discrétisation des dynamiques continues ; ainsi que l'étude des systèmes hors d'équilibre pour lesquels la mesure invariante n'est pas connue, mais dont les propriétés peuvent être étudiées par l'étude des perturbations de l'opérateur de Fokker-Planch sous-jacent.

MAM51 **Modèles probabilistes en Neurosciences (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Michèle Thieullen

Thèmes abordés :
Les phénomènes biophysiques observés en neurosciences sont d'une grande complexité. Pendant de nombreuses années leur modélisation a reposé sur des modèles déterministes, mais il est maintenant bien établi que les modèles stochastiques sont indispensables pour décrire avec précision certains phénomènes. Dans ce cours nous décrirons les grands types de modèles stochastiques existants. Pour chaque type nous identifierons les questions probabilistes soulevées et les outils nécessaires de la théorie des probabilités seront introduits. On abordera par exemple les questions suivantes : premier temps de passage, systèmes lents-rapides, applications des grandes déviations, comportement stationnaire, approximation diffusion. Le lien avec certaines équations aux dérivées partielles sera souligné sur des exemples.

MAM58 **Algèbre tropicale en optimisation et en jeux (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Stéphane Gaubert

Prérequis :
Analyse fonctionnelle élémentaire, analyse convexe
Objectifs de l'UE :
Ce cours présente un certain nombre d'outils et résultats récents, inspirés de la géométrie tropicale, relatifs aux problèmes de contrôle ou de jeux répétés, déterministes ou stochastiques, avec une attention particulière pour les problèmes de paiement moyen ou en temps long ainsi que pour les aspects combinatoires et algorithmiques. Certains résultats sont illustrés par des exemples issus d'applications (optimisation du référencement, optimisation de la croissance en dynamique de population).
Thèmes abordés :
Algèbre tropicale et structures de "caractéristique un" (semi-corps max-plus). Résolution de problèmes avec paiement moyen via des problèmes spectraux non-linéaires. Représentation des opérateurs de Shapley. Théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, dynamiques monotones ou non-expansives. Existence du paiement moyen. Certificats de Collatz-Wielandt. Généralisation non-linéaire de l'algorithme de la puissance. Algorithmes d'itération sur les politiques. Résultats de complexité pour les jeux répétés.

MAM67 **Autour de la stabilité de l'espace-temps de Minkowski (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Jérémie Szeftel

Prérequis :
Connaissances de base concernant l'analyse fonctionnelle.
Aucune connaissance concernant l'équation des ondes, les variétés différentielles, la géométrie Riemannienne et Lorentzienne, et les équations d'Einstein n'est nécessaire poursuivre le cours.
Objectif :
Le but de ce cours est d'introduire les outils mathématiques nécessaires à la preuve de la stabilité de l'espace-temps de Minkowski.
Après des préliminaires sur le calcul différentiel et la géométrie Lorentzienne, je dériverai les équations d'Einstein à partir du principe de moindre action. Puis, je continuerai avec des résultats sur l'existence locale pour l'équation des ondes non linéaire en lien avec les équations d'Einstein. Enfin, je parlerai d'existence globale et de comportement asymptotique pour l'équation des ondes non linéaire en lien avec la stabilité de l'espace-temps de Minkowski pour les équations d'Einstein.
Thèmes abordés :
- Géométrie Lorentzienne
- Equations d'onde linéaire et non linéaire
- Equations d'Einstein
- Méthode des champs de vecteurs
- Inégalité de Klainerman Sobolev
- Condition nulle et faible nulle

MAM72 **Fonctionnement des réseaux de neurones : analyse mathématique (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Delphine Salort

Thèmes abordés :
L'élaboration et l'étude de nouveaux modèles mathématiques issus des neurosciences constitue une discipline émergente et encore très loin d'être pleinement exploitée. La modélisation de la dynamique des réseaux de neurones est extrêmement complexe : les mécanismes sous-jacents sont régis par des dynamiques à la fois déterministes et stochastiques à différentes échelles : allant d'un neurone seul au niveau collectif avec différents régimes temporels.
Dans le cadre de ce cours, nous nous focaliserons principalement sur la dynamique de modèles d'EDP déterministes. L'objectif, sera de comprendre, à travers ces modèles, comment il est possible de décrire plusieurs mécanismes observés biologiquement, comme les phénomènes de synchronisation, les phénomènes de propagation du signal âĂę
Les modèles utilisés peuvent faire apparaitre des non linéarités et des structures atypiques, ce qui rend leur étude parfois très complexe et il s'agira d'introduire et étudier les outils mathématiques nécessaires afin de pouvoir obtenir une description qualitative fine des solutions de ces équations. Parmi ces outils, les méthodes de type entropie relative, Doeblin, ainsi que la construction explicite de solutions complexes seront à la base de l'analyse de ces modèles. Plus précisément, nous étudierons :

— Les principaux modèles utilisés pour la dynamique d'un neurone
— Les modèles time elapsed et Fokker-Planck (Integrate and fire) pour les réseaux de neurones homogènes
— Des modèles intégro-différentiels pour les réseaux avec dimension spatiale.

Certaines méthodes que nous étudierons dans ce cours sont proches de celles associées aux cours "Equations structurées en biologie" ou "mathematical methods in biology".

MAM05 **Equations de réaction - diffusion et dynamiques de populations biologiques (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Henri Berestycki & Grégoire Nadin

Thèmes abordés :
Des phénomènes observés dans des contextes très variés sont représentés par des équations de type réaction-diffusion : dynamique des populations, écologie, épidémiologie, invasions biologiques, comportements collectifs, et aussi : propagation de flammes, transistions de phases, ondes chimiques, etcâĂę Ce cours développera des méthodes mathématiques pour analyser ce type d'équations. Elles seront ensuite mises en oeuvre pour établir une série de résultats importants sur ces problèmes. Une première partie sera consacrée aux propriétés fondamentales des équations elliptiques et paraboliques linéraires et non linéaires. On étudiera ensuite les états stationnaires de ces équations, les propriétés dynamiques et l'existence de solutions de type fronts progressifs. On s'attachera en particulier à en déterminer les vitesses et les formes ainsi que les propriétés qualitatives. La prise en compte de l'hétérogénéité de l'environnement conduit à des généralisations de la notion de fronts progressifs qui seront présentées. On décrira quelques modèles de dynamique des populations pour la biologie et différentes applications. Dans le cadre de ces modèles, on analysera

les effets des environnements hétérogènes sur la survie des espèces. On examinera la forme des invasions biologiques en fonction de l'environnement. On développera aussi des modèles permettant de décrire les effets de changements climatiques sur la survie de certaines espèces biologiques.

MAM73 **Théorie géométrique du contrôle (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Mario Sigalotti & Ugo Boscain

Objectifs de l'UE :
La théorie géométrique du contrôle étudie, du point de vue qualitatif et géométrique, les propriétés des systèmes dynamiques dont certains paramètres peuvent être contrôlés en fonction du temps. L'objectif du cours est d'introduire les notions fondamentales de cette théorie et de montrer comment elles peuvent être appliquées à des systèmes issus d'applications ou d'autres théories mathématiques.
Thèmes abordés :
- Accessibilité de systèmes non linéaires et contrôlabilité de systèmes symétriques (théorèmes de Krener et Chow).
- Contrôlabilité de systèmes non linéaires (flots récurrents, condition forte de HÃűrmander, convexification, systèmes invariants sur groupes de Lie avec applications à la contrôlabilité de systèmes quantiques).
- Contrôle optimal (existence par le théorème de Filippov, principe de maximum de Pontriaguine, trajectoires anormales et singulières).
- Optimisation du temps (introduction aux synthèses optimales en dimension deux, applications aux systèmes quantiques).
- Systèmes symétriques avec coût quadratique : introduction à la géométrie sous-riemannienne.

MAM75 **Approximation et traitement de données en grande dimension (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Albert Cohen

Objectif :
Reconstruire une fonction inconnue à partir de données ponctuelles, exacte ou bruitées, est un problème mathématique rencontré dans une multitude de contextes applicatif. On peut citer l'interpolation ou l'apprentissage statistique à partir de données expérimentales, la mise au point de surfaces de réponses issues de codes numériques ou d'équations aux dérivées partielles. Ces tâches deviennent particulièrement délicates en grande dimension, les méthodes numériques classiques étant souvent mises en échec. Ce cours explorera les fondements mathématiques de ce problème aussi bien sous l'angle de la théorie de l'approximation, que de l'analyse numérique et des statistiques. Des developpement récents permettant de traiter certains problèmes en grande dimension seront abordés.
Contenu :
- Théorie de l'approximation lineaire et non-linéaire
- Epaisseurs et entropies de Kolmogorov
- Interpolation, régression et méthodes de moindres carrés
- Approximation parcimonieuse en grande dimension
- EDP paramétriques et bases réduites

MAM86 **Réseaux de neurones et approximation numérique adaptative (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Bruno Després

Objectif :
Ce cours présente comment utiliser les réseaux de neurones pour l'approximation numérique adaptative
Contenu :
- Fonctions représentables par des réseaux de neurones.
- Preuves élémentaires du théorème de Cybenko. La fonction de Takagi.
- Construction de datasets, hyper-cube Latin, et malédiction de la dimension.
- Interprétation des algorithmes de gradients stochastiques sous la forme d'équations différentielles ordinaires. Algorithme ADAM.
- Applications à des problèmes issus du calcul scientifique pour la CFD en lien avec la classification d'images.
- Illustration avec quelques logiciels principalement Tensorflow.

MAM84 **Méthodes de tenseurs pour la résolution d'EDPs en grande dimension (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Virginie Ehrlacher & Mi-Song Dupuy

Objectif :
Ce cours est une introduction à la théorie et à la pratique des méthodes dites "de tenseurs" pour la résolution d'équations aux dérivées partielles en grande dimension. Pour approcher numériquement une fonction dépendant d'un grand nombre de variables, solution d'une équation aux dérivées partielles, les méthodes numériques classiques comme la méthode des élements finis ne peuvent pas être utilisées en pratique à cause du phénomème qu'on appelle la malédiction de la dimensionalité : pour un degré de précision fixé, le nombre d'inconnues à identifier pour approcher la fonction augmente de manière exponentielle avec le nombre de variables dont celle-ci dépend ! Il y a cependant de nombreux types d'équations dont la solution dépend d'un grand nombre de variables : l'équation de Schrödinger en chimie ou physique quantique, l'équation de Fokker-Planck pour les systèmes stochastiques, les modèles de jeux à champs moyen en théorie des jeux... Dans ce cours, nous présenterons les principales propriétés mathématiques des principaux formats de tenseurs, comme les trains ou les réseaux de tenseurs, ainsi que diverses méthodes numériques associées pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.

EXT **Pathwise techniques in stochastic analysis : rough paths & Co (6 ECTS) (2ème semestre) (module externe M2 ATM Dauphine)**
Prof. : Massimiliano Gubinelli

Cours emprunté au master " Applied and Theoretical Mathématiques " de l'université Paris Sciences Lettre à Dauphine
Objectif :
This course is an introduction of some recent (and less recent) trends in stochastic analysis going beyond the standard techniques of stochastic calculus and going under the umbrella name of "rough analysis". Starting from rough path theory, these

techniques allow to resolve the singularities of the non-linear interactions of random fields, and identify new “building blocks” which can then be used to synthetize solutions of stochastic differential equations which are ill-posed wrt standard “linear” approaches, or just not very robust. The plan of the course is to explain the basic ideas of rough path theory, pathwise regularization by noise and some paracontrolled calculus applied to the construction of singular unbounded operators. The different settings will allow to present the basic ideas from various perspectives.

EXT **Entropy methods, functional inequalities and applications (6 ECTS) (2ème semestre) (module externe M2 ATM Dauphine)**
Prof. : Emeric Bouin, Amic Frouvelle et Jean Dolbeault

Cours emprunté au master “ Applied and Theoretical Mathématiques ” de l’université Paris Sciences Lettre à Dauphine
Objectif :
Various functional inequalities are classically seen from a variational point of view in nonlinear analysis. They also have important consequences for evolution problems. For instance, entropy estimates are standard tools for relating rates of convergence towards asymptotic regimes in time-dependent equations with optimal constants of various functional inequalities. This point of view applies to linear diffusionsand will be illustrated by some results on the Fokker-Planck equation based on the "carré du champ" method introduced by D. Bakry and M. Emery. In the recent years,the method has been extended from linear to nonlinear diffusions. This aspect will be illustrated by results on Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inequalities on the sphere and on the Euclidean space. Even the evolution equations can be used as a tool for the study of detailed properties of optimal functions in inequalities and their refinements. There are also applications to other equations than pure diffusions : hypocoercivity in kinetic equations is one of them. In any case, the notion of entropy has deep roots in statistical mechanics, with applications in various areas of science ranging from mathematical physics to models in biology. A special emphasis will be put during the course on the corresponding models which offer many directions for new research development.

EXT **Problèmes variationnels et de transport en économie (6 ECTS) (2ème semestre) (module externe M2 MASEF)**
Prof. : Guillaume Carlier

Cfr. site du cours sur :

`https://www.ceremade.dauphine.fr/mastermasef/fr/?page_id=26`

EXT **Théorie de jeux à champs moyens (6 ECTS) (2ème semestre) (module externe M2 MASEF)**
Prof. : Pierre Cardaliaguet

Cfr. site du cours sur :

`https://www.ceremade.dauphine.fr/mastermasef/fr/?page_id=26`

MAM83 **Propagation d'évidence dans les réseaux bayésiens, applications en médecine (6 ECTS) (2ème semestre) (module externe M2 PMA)**
Prof. : Gregory Nuel

L'objectif de ce cours :
L'objectif de ce cours est d'introduire les réseaux bayésiens (Bayesian networks - BNs) et l'algorithme permettant d'y faire de l'inférence exacte : la propagation d'évidence ("belief propagation" en anglais, ou encore "sum-product algorithm"). Le cours est illustré avec de nombreux exemples : de réseaux bayésiens jouet aux différents modèles de chaînes de Markov cachées (Hidden Markov Models - HMM). On portera une attention toute particulière au cas particulier des HMMs et de la version forward-backward de la propagation d'évidence. Ne sont pas traités dans ce cours : l'estimation de paramètres ni l'apprentissage de structure de BN.
Thèmes abordés :
- notion de réseaux bayésien (vu comme une généralisation des modèles Markovien discrets)
- notion d'évidence, marginalisation
- notion de junction tree, heuristiques de construction
- notion de messages, théorèmes fondamentaux
- algorithmes de propagation, inward/outward, lois jointes
- applications diverses (chaînes de Markov conditionnées par ses deux extrémités, chaînes de Markov cachées sous contraintes, arbres Markoviens avec boucles, etc.)
- calcul et maximisation de de la vraisemblance en présence de données complètes
- maximisation de la vraisemblance en présence de données incomplètes (par exemple par algorithme EM ou par optimisation multi-dimensionnelle directe)

L'ensemble du cours sera illustré par de nombreux exemples, notamment dans le contexte biomédical (diagnostic d'une maladie, prise en charge d'un patient aux urgences, génétique humaine, etc.), pour lesquels les calculs seront implémentés sous le logiciel R (pas de prérequis, car niveau technique de programmation assez faible). Deux ouvrages de référence sur le sujet : (Jensen 1996), un livre assez ancien, mais toujours intéressant ou bien l'excellent et très complet (Koller and Friedman 2009). NB : bien que le mot clef "bayésien" soit dans l'intitulé du cours, celui-ci ne traite absolument pas l'inférence bayésienne.

MAM82 **Modèles stochastiques de la biologie moléculaire (6 ECTS) (2ème semestre) (module externe M2 PMA)**
Prof. : Philippe Robert

Programme :
Ce cours présente plusieurs modèles mathématiques fondamentaux de la biologie moléculaire où les phénomènes aléatoires jouent un rôle-clé. Aucune notion de biologie n'est prérequise.
On s'intéressera tout d'abord à l'expression du gène, i.e. la production de protéines dans les cellules prokaryotes (comme les bactéries). En raison du milieu désordonné du cytoplasme de ces cellules, les expériences montrent une grande variabilité du nombre de protéines d'un type donné dans les cellules d'une même culture. Les

modèles dans ce contexte ont pour objectif d'identifier les paramètres de la cellule qui permettent de contrôler la variabilité de la production de protéines.
La deuxième partie s'intéressera aux phénomènes de polymérisation dans un cadre biologique. Certaines protéines à l'intérieur de la cellule ont la propriété de pouvoir s'assembler en longues fibres appelées polymères. De nombreux processus biologiques utilisent ces mécanismes qui contribuent au bon fonctionnement des cellules, pour l'élaboration du cytosquelette notamment. Dans certains cas cependant ces phénomènes peuvent être pathologiques, dans les cellules nerveuses notamment où des maladies comme celle d'Alzheimer semblent être liées à ce type de mécanismes. On observe dans les expériences in vitro que, au bout d'un temps très variable suivant les expériences, la concentration en polymères passe de la valeur 0 à une valeur élevée. Les modèles probabilistes utilisés ont pour objet de pouvoir expliquer la variabilité des phénomènes observé et d'étudier l'impact des différents paramètres sur la variance du temps de polymérisation.
Les méthodes probabilistes présentées utilisent plusieurs types de techniques

- Calcul stochastique pour les processus ponctuels de Poisson marqués
- Théorèmes limite pour les processus de sauts markoviens.
- Méthodes d'homogénéisation.

qui seront rappelées lors du cours.

(1) Introduction.

- Introduction au calcul stochastique pour les processus ponctuels de Poisson marqués. Rappels sur les martingales associées aux proces- sus markoviens de sauts.
- Convergence en distribution des processus de sauts markoviens. Homogénéisation des processus de Markov.
- Modèles probabilistes des phénomènes chimiques. Loi d'action de masse, équations de Michaelis-Menten.

(2) Expression du Gène.

- Modèles markoviens et non-markoviens de la production de protéi- nes. Existence et caractérisation de la loi invariante de la concen- tration d'une protéine d'un type donné. étude de la variance à l'équilibre.
- Compétition pour les ressources de la cellule dans la production de protéines : un modèle de champs moyen.
- étude de l'impact de l'auto-régulation de la production de protéines sur la variabilité du nombre de protéines : méthodes d'homogénéi- sation.

(3) Modèles de la Polymérisation.

- Un modèle simplifié de la polymérisation avec deux espèces de polymères. Théorèmes central-limite fonctionnels.
- Variations sur les renormalisations des taux de polymérisation.
- Impact des phénomènes de nucléation.

Références

[1] David F. Anderson and Thomas G. Kurtz, Stochastic analysis of biochemical systems, Mathematical Biosciences Institute Lecture Series. Stochastics in Biological Systems, vol. 1, Springer, Cham ; MBI Mathematical Biosciences Institute, Ohio State University, Columbus, OH, 2015. MR 3363610
[2] Marie Doumic, Sarah Eugène, and Philippe Robert, Asymptotics of stochastic

protein assembly models, SIAM Journal on Applied Mathematics 76 (2016), no. 6, 2333âĂŞ2352.
[3] Vincent Fromion, Emanuele Leoncini, and Philippe Robert, Stochastic gene expression in cells : A point process approach, SIAM Journal on Applied Mathematics 73 (2013), no. 1, 195âĂŞ211.
[4] T.G. Kurtz, Averaging for martingale problems and stochastic approximation, Applied Stochastic Analysis, US-French Workshop, Lecture notes in Control and Information sciences, vol. 177, Springer Verlag, 1992, pp. 186–209.
[5] Nicolaas Godfried Van Kampen, Stochastic processes in physics and chemistry, vol. 1, Elsevier, 1992.

MK27 **Jeux à champ moyen (6 ECTS) (2ème semestre) (module externe M2 PMA)**
Prof. : Charles Bertucci

Programme : Le but de ce cours est de présenter la théorie nouvelle des jeux à champ moyen, notamment à travers certaines de ces applications en finance. Les jeux à champ moyen sont des jeux faisant intervenir un nombre infini de “petits” joueurs, c'est à dire qui ont seulement une influence marginale sur le jeux. Nous verrons en particuliers à travers deux exemples que nous suivrons durant le cours (un issu d'un marché de crypto-monnaies et un issu d'un problème de liquidation optimale), pourquoi de tels jeux sont des modèles naturels en finance. D'un point de vue mathématique, cette théorie repose essentiellement sur le contr'ôle optimal (stochastique) et sur la théorie des jeux. On interprétera d'ailleurs certaines équations caractérisant les équilibres dans un jeux à champ moyen comme une certaine forme de programmation dynamique, où chaque joueur prend en compte le comportement des autres joueurs.

Bien que la plupart des concepts mathématiques seront réintroduits, il est fortement conseillé d'être familier avec la programmation dynamique de Bellman (avoir suivi le cours d'optimisation du premier semestre par exemple). Aucune connaissance en théorie des jeux n'est prérequise. Ce cours sera consacré en grande partie à des questions de modélisations, notamment aux hypothèses structurelles à l'origine de la stabilité dans ces jeux.

— Préliminaires : théorie des jeux et optimisation
— Un premier exemple issu des crypto-monnaies
— Équations d'évolution de populations puis d'équilibre dans un jeux à champ moyen
— Exemple de la liquidation optimale
— Master equation
— Compléments de modélisations (procédure d'apprentissage, présence d'un joueur majoritaire, etc.)

EXT **Active Particles : Emerging Behavior in Collective Dynamics (6 ECTS) (2ème semestre) (module externe M2 PMA)**
Prof. : Eitan Tadmor

Programme : Nature and human societies offer many examples of self-organized behavior : ants form colonies, birds flock, mobile networks synchronize, and a consensus may emerge from the interaction of diverse human opinions. These are simple examples of collective dynamics in which small scale interactions lead to emergence of high-order structures with larger-scale patterns. Prototype models are found in opinion dynamics, self-organization of biological organisms and rendez-vous of sensor-based systems. In these lectures I will survey recent mathematical developments in collective dynamics, starting with the influential works of Reynolds, Krause, Vicsek and Cucker & Smale. The dynamics is governed by different protocols of pairwise interactions, quantified in terms of proper communication kernels. Collisions are avoided. A main question of interest is how different classes of such kernels affect the large-time, large-crowd dynamics. I will discuss different models and the analysis for different protocols of interactions : how they affect the emergence of large-scale patterns ; how graph connectivity dictates the emergent behavior of multi-species dynamics ; what is the large-time, large crowd behavior for systems far from equilibrium.

MAM98 **Du fluide de Stokes aux suspensions de solides rigides : aspects théoriques et numériques (6 ECTS) (2ème semestre)**
Prof. : Aline Lefebvre-Lepot et Flore Nabet

Objectif :
L'objectif du cours est double :
- Dans une première partie, on se concentrera sur les équations de Stokes, modélisant des fluides visqueux incompressibles à bas nombre de Reynolds. On montrera comment les méthodes variationnelles permettent d'étudier ces équations. On étudiera également la discrétisation du problème par éléments finis.
- Dans une second partie, on abordera le problème de la simulation de solides rigides dans un tel fluide de Stokes. On fera un tour d'horizon des difficultés théoriques et numériques que posent un tel problème : couplage fluide/solide, prise en compte d'un sous-domaine solide dans le domaine de calcul, gestion de la singularité générée quand les solides se rapprochent, gestion des contacts entre solides (contacts inélastiques, avec ou sans friction).

Des illustrations numériques des différents schémas étudiés seront présentées. Ce cours est une introduction à la modélisation et la simulation de systèmes formés de solides rigides immergés dans un fluide visqueux. Ceux-ci sont présents dans de nombreux champs d'application, incluant l'industrie (alimentation, cosmétiques, béton, plastiques renforcés...), la nature (lits de rivières, transport de sédiments, érosion de c'ôtes...), l'écologie (retraitement des eaux usées...). Comprendre le comportement de ces systèmes est un domaine de recherche actif, présentant de nombreuses difficultés que l'on mettra en évidence.

Si l'on se concentre ici sur les solides en suspensions, les outils et méthodes présentés dans ce cours s'étendent à de nombreux autres domaines de recherche : mécanique des fluides, les méthodes de résolution par éléments finis, optimisation sous contrainte...

Outils mathématiques utilisés : Equations de Stokes, formulations variationnelles, éléments finis, condition inf-sup, optimisation sous contrainte affine ou c'ônique, dualité, multiplicateurs de Lagrange, méthode de pénalisation.

Prérequis :
Il est recommandé d'avoir de bonnes bases en analyse fonctionnelle. Des notions sur les formulations variationnelles pour les EDP, les éléments finis et/ou l'optimisation sont également recommandées. Ces notions seront rappelées pendant le cours, des références bibliographiques seront données si besoin

Chapitre 6

Master 2, parcours Ingénierie mathématique

6.1 Objectifs et descriptions

Le but de ce parcours qualifié de *professionnel* est de former des mathématiciens appliqués de haut niveau, ayant, outre les qualités associées habituellement à une formation solide en mathématiques, une réelle maîtrise de l'outil informatique, les rendant aptes à intervenir dans le monde de l'entreprise ou des services.

Depuis septembre 2018 ce parcours est ouvert **à la fois aux étudiant·e·s en formation initiale et aux étudiant·e·s en alternance**. Il propose trois majeures dans un seul et même parcours de M2 en Ingénierie mathématique :

— IMPE-Ingénierie Mathématique Pour l'Entreprise (responsables : F. Charles et C. Guichard),

— IFMA-Ingénierie Financière et Modèles Aléatoires, (responsables : V. Lemaire et L. Abbas-Turki),

— ISDS-Ingénierie Statistique et Data Sciences de l'ISUP (responsables J.-P. Baudry et O. Wintenberger).

Pour ce qui relève de l'apprentissage, le parcours est associé au CFA des Sciences qui organise le pré-recrutement des apprentis dès le mois d'avril précédent l'année de M2.

6.2 Débouchés professionnels

Des compétences pluridisciplinaires et un stage de quatre mois minimum en entreprise (ou la mission en apprentissage) donnent accès à des débouchés variés dans les secteurs utilisant la modélisation, la simulation numérique, l'estimation ou la prévision (R&D dans l'industrie, ESN, Banque, Assurance). Les meilleur·e·s étudiant·e·s peuvent aussi continuer en thèse, le plus souvent en mathématiques appliquées, en milieu universitaire, dans un centre de recherche (comme l'IFPen, ONERA, etc.) ou dans l'entreprise ou l'industrie (thèse Cifre). Les débouchés du parcours IFMA (Ingénierie Financière et Modèles Aléatoires) sont plus spécifiquement les banques, les compagnies d'assurance et les sociétés de services informatiques spécialisées dans la gestion des instruments financiers.

La liste des stages effectués ces dernières années, consultable sur les sites des formations, atteste de la réalité de l'insertion de ce parcours dans ces différents secteurs professionnels.

6.3 Organisation

Le master Ingénierie mathématique propose trois majeures différenciées. Chaque majeure est contrainte, et ne permet que peu de choix dans les enseignements suivis. Les trois majeures ont une structure en UE identique, avec certains enseignements de probabilités-statistique ou d'analyse numérique communs à deux ou trois majeures. Un cours obligatoire d'Anglais est également proposé aux trois cursus, il est assuré par le Département de langues qui offre la possibilité d'un entrainement au Toeic.

La première partie de l'année à l'université est structurée en trois blocs (voir tableau 6.1 : un bloc de base sur 7 semaines, un bloc fondamental sur 8 semaines, et un bloc d'options sur 10 semaines.

De manière à rendre possible l'alternance, les cours et examens communs à tous les étudiants ont lieu

— du 4 septembre 2023 au 15 décembre 2023 : les lundis, mardis et mercredis.

— du 15 janvier au 31 mars 2024 : les lundis et mardis.

Les étudiant·e·s (non apprenti·e·s) sont susceptibles d'avoir des enseignements les autres jours également.

A la suite de cette période de formation (à partir du mois d'avril), les étudiant·e·s non apprenti·e·s effectuent un stage long en immersion complète en entreprise ou dans un grand centre de recherche. Pendant cette période les étudiant·e·s apprenti·e·s sont à temps plein dans l'entreprise.

Table 6.1 – Organisation des enseignements en trois blocs

Bloc de base	7 semaines d'enseignement du 5 septembre au 21 octobre 2023 UE : Anglais, 5MI01 Ingénierie 1 et 5MI02 Méthodes mathématiques pour l'Ingénierie Examens la semaine du 16 octobre 2023
Bloc fondamental	8 semaines d'enseignement du 24 octobre 2023 au 16 décembre 2023 UE : Anglais, 5MI03 Outils informatiques pour l'Ingénierie et 5MI04 Ingénierie 2 Une semaine sans enseignements du 30 octobre au 5 novembre 2023 Examens du 18 au 21 décembre 2023 et du 8 au 12 janvier 2024
Bloc d'options	10 semaines d'enseignement du 15 janvier au 31 mars 2024 UE : 5MI05 Spécialisation 1 et 5MI06 Spécialisation 2 La plupart de ces enseignements sont en mode projet, l'évaluation a lieu au cours des 10 semaines. Une semaine sans enseignements du 19 au 25 février 2024
Examens de seconde chance : début mai pour les blocs 1 et 2, en septembre 2023 pour le bloc 3	

Majeure IMPE

La majeure *Ingénierie Mathématique Pour l'Entreprise* (IMPE) est la plus généraliste des trois. Les étudiant·e·s suivent tous des enseignements théoriques et pratiques d'analyse numérique et calcul scientifique et un cours de base en statistiques, complétés par une formation en ingénierie mathématique de l'un des deux domaines

— mécanique (des fluides et des solides),
— probabilités et statistique.

Les unités Analyse numérique-calcul scientifique sont donc communes aux deux filières, elles sont complétées par des cours spécifiques au domaine choisi. Les cours TD, TP sont obligatoires au premier semestre (septembre-mars). Les étudiant·e·s effectuent des projets dans chaque matière. Un cours d'informatique scientifique et des travaux pratiques d'implémentation numérique permettent la mise en œuvre effective de méthodes numériques (Programmation en C, C++ et Matlab). Des projets avancés (en C++, calcul parallèle, code_Aster et FreeFEM++), des cours complémentaires (programmation Python, VBA, Cuda,..) sont choisis suivant les filières, ils permettent de conforter le domaine de compétences ou de se préparer au stage. Un cours obligatoire d'Anglais fait partie du cursus.

L'unité d'insertion professionnelle est proposée de façon spécifique à cette majeure. Elle permet aux étudiant·e·s une meilleure connaissance des débouchés très variés et leur fournit de bons outils d'insertion (rédaction du CV, préparation au stage, recherche d'un premier emploi).

Les étudiant·e·s en formation initiale effectuent à partir d'avril un stage long d'au moins quatre mois (mais le plus souvent six mois) en entreprise. Pendant le stage, ils ne suivent plus de cours et sont complètement insérés dans l'entreprise. Une soutenance finale devant un jury, avec rédaction d'un rapport, contribue à l'évaluation du stage et complète ainsi leur expérience professionnelle. Les brochures des résumés de stage disponibles sur le site de la formation permettent de se rendre compte de la variété des stages effectués.

Tous les ans, à l'issue du stage ou de l'apprentissage, certain·e·s étudiant·e·s poursuivent leur formation dans le cadre d'un Doctorat, le plus souvent CIFRE, voir les exemples de débouchés sur le site web.

Majeure IFMA

La majeure *Ingénierie financière et modèles aléatoires* (IFMA) a été créée en 2006 pour répondre à une demande, les débouchés dans le secteur bancaire pour des étudiants formés aux mathématiques financières étant actuellement très bons. Cette majeure a pour objectif de former des ingénieurs mathématiciens ayant une triple compétence en calcul stochastique et finance mathématique, informatique et statistiques. La majeure prépare à l'évaluation et à la gestion quantitative des risques aléatoires tant du point de l'analyse stochastique que de leur traitement statistique et numérique.

La présence à tous les cours de la majeure est obligatoire. Après les deux cours de base, les deux unités du premier semestre (fin octobre - décembre) regroupent les cours fondamentaux de la formation qui permettent d'acquérir les outils mathématiques et numériques nécessaires en finance quantitative (finance de marché), et forment à la programmation en C++. L'autre unité de spécialisation en programmation VBA et sur carte graphique (GPU) complète cette formation. En vue de faciliter l'insertion professionnelle, des cours sont donnés par des professionnels de la finance sur des sujets pointus.

Les étudiants effectuent à partir d'avril un stage long d'au moins quatre mois (mais le plus souvent six mois) en entreprise. Pendant le stage, ils ne suivent plus de cours et sont complètement insérés dans l'entreprise.

Majeure ISDS

Cette majeure propose une formation de haut niveau aux carrières de Statisticien et Data Scientist dans les domaines porteurs liés à la Recherche et Développement dans les secteurs innovants. Cette majeure délivre le double diplôme du Master Mathématiques et Applications parcours Ingénierie Mathématique et de l'ISUP filière ISDS.

La création de bases de données considérables dans les domaines du vivant, des communications et des services mène à des questions neuves, portant sur la recherche de méthodes de classification en haute dimension, d'identification d'événements rares, de mise en évidence de réseaux relationnels, etc ; on peut citer les questions de diagnostic épidémique, de traitement de requêtes en contrôle aérien, de marketing en lien avec les moteurs de recherche. La Statistique a un rôle central dans ce domaine très actif et porteur ; les possibilités de carrières très motivantes y sont très nombreuses. Les étudiants de cette majeure suivent des cours spécifiques de data mining, basés sur l'expérience et l'expertise de ses enseignants issus de notre Université ou experts reconnus dans les entreprises majeures du domaine, assurés par L'ISUP, des cours d'informatique adaptée aux grandes bases de données, des cours de mathématiques, probabilités et statistiques mutualisés avec les deux autres majeures.

Cette filière s'appuie sur une expérience réussie d'alternance, permettant à nos étudiants une formation en prise avec le monde de l'Industrie et des Services. Les liens étroits entre l'ISUP et les entreprises facilitent l'ínsertion professionnelle des diplômés.

6.4 Publics visés, prérequis

Ce parcours s'adresse à des titulaires d'une première année de Master de Mathématiques (une composante de mathématiques appliquées est souhaitée) ou de Mécanique (pour la majeure IMPE-mécanique), ou de titres équivalents. Pour la majeure IMPE, des connaissances de base en analyse numérique matricielle et des équations différentielles ordinaires (EDO), et en équations aux dérivées partielles (EDP) sont souhaitées. La majeure IFMA (Ingénierie Financière et Modèles Aléatoires) s'adresse à des candidat.e.s ayant déjà une formation en probabilités de niveau M1. Admission sur dossier (pour chaque majeure). La majeure ISDS (Ingénierie Statistique et Data Science) s'adresse à des étudiant·e·s sortant de la première année de la filière

Ingénierie statistique et data sciences de l'ISUP ou de la première année d'un master de mathématiques appliquées avec une spécialisation en probabilité et statistiques.

6.5 Description des UE

Le parcours propose 6 UE scientifiques à 6 ects chacune, 2 pour le premier bloc de base (voir tableau 6.3), 2 pour le deuxième bloc fondamental (voir tableau 6.4), 2 pour le dernier bloc de spécialisation (voir tableau 6.5), soit 36 ects en tout. Une UE d'anglais à 3 ECTs est répartie sur les deux premiers blocs. L'UE de stage constitue 18 ECTS. Pour les étudiant·e·s en formation initiale les 3 ECTS restants correspondent à l'OIP (3 ects). Pour les apprenti·e·s il s'agit de l'UE "pratique professionnelle".

Table 6.2 – Code couleur pour les mutualisations

blanc	commun à tous
cyan	ISDS+IFMA+IMPEproba
jaune	ISDS+IFMA
gris	IFMA+IMPEproba
rose	IFMA
orange	ISDS
turquoise	IMPE
vert	IMPEmeca

Chaque UE est composée de plusieurs cours, communs ou non à plusieurs majeures, suivant le code couleur indiqué dans le tableau 6.2. Sauf indication contraire les cours sont assurés par des enseignants-chercheurs de Sorbonne Université.

Unités communes aux trois majeures

- **5MI01 - Ingénierie 1 : Méthodes numériques**
  Professeur : Cindy Guichard
  Ce cours traite de la discrétisation des EDP en 1D notamment par la méthode des différences finies. Des notions d'algèbre linéaire numérique seront également abordées en fin de cours. En fonction du parcours de l'étudiant·e, ce contenu pourra être vu comme des rappels de M1.
- **5MI01 - Ingénierie 1 : Statistique inférentielle**
  Professeur : Jean-Patrick Baudry
  Introduction Ãă la statistique mathématique, dont les notions essentielles seront présentées : modèles statistiques paramétriques, estimation ponctuelle, intervalles de confiance, tests statistiques. TP d'application avec le logiciel *R*.
- **5MI01 - Ingénierie 1 : Fondamentaux du C/C++**
  Professeur : Guillaume Delay
  Syntaxe classique du C/C++. Programmation orientée objets (classes, héritage, polymorphisme dynamique) et Programmation générique (template,

Table 6.3 – Enseignements du bloc de base (UE Ingénierie 1 et méthodes mathématiques pour le modélisation)

Bloc de base 6+1 semaines 3j/semaine				10 sept-26 oct		Nom d'UE
ISDS	IFMA	IMPE/proba	IMPE/meca	vol horaire	ects	
Anglais	Anglais	Anglais	Anglais	14	1.5	
Méthodes numériques	Méthodes numériques	Méthodes numériques	Méthodes numériques	21	2	Ingénierie 1
Fondamentaux du C/C++	Fondamentaux du C/C++	Fondamentaux du C/C++	Fondamentaux du C/C++	21	2	
Modèles aléatoires	Modèles aléatoires	Modèles aléatoires	Mécanique des milieux continus	21	2	
Calcul stochastique	Calcul stochastique	Optimisation	Optimisation	21	2	Méthodes mathématiques pour la modélisation
Apprentissage Statistique	Statistique inférentielle	Statistique inférentielle	Statistique inférentielle	21	2	
	Méthodes de Monte Carlo	Méthodes de Monte Carlo	Initiation Code_Aster	21	2	

STL, polymorphisme statique). On aborde la programmation moderne du C++14 et l'intégration avec R via `Rcpp` et Python via `pybind11`. Exemples numériques liés aux équations paraboliques (méthodes déterministes et aléatoires).

— **5MI02 - Méthodes mathématiques pour la modélisation : Modèles aléatoires**
Professeur : Olivier Bardou
Cours d'introduction aux processus de Markov :
— Chaînes de Markov à temps discret,
— Processus de sauts markoviens,
— Propriétés des processus en temps long, théorèmes ergodiques.

— **5MI03 - Outils math. pour l'ingénierie : Introduction CUDA**
Professeur : Roman Lakymchuk
Ce cours introduit de faÃğon simple et efficace à la simulation sur GPU (Graphics Processing Units). Il est agencé autour de la simulation Monte Carlo fortement adaptée à la parallélisation. Il permet ainsi de se concentrer sur les optimisations permises par l'architecture du GPU.

Table 6.4 – Enseignements du bloc fondamental (UE Ingénierie 2 et outils informatiques pour l'ingénierie)

Bloc d'approfondissement 7+1 semaines 3j/semaine				7 nov-21 déc		Nom d'UE
ISDS	IFMA	IMPE/proba	IMPE/meca	vol horaire	ects	
Anglais	Anglais	Anglais	Anglais	16	1.5	Anglais
Introduction CUDA	Introduction CUDA	Introduction CUDA	Introduction CUDA	12	1	Outils informatiques pour l'ingénierie
suite App. Statistique	Langage Python	Langage Python	Langage Python	12	1	
Stat. appr. pour la prévision (36h 3ects)	Analyse de données (logiciel R)	Analyse de données (logiciel R)	Analyse de données (logiciel R)	24	2	
Contrôle qualité (12h 1ects)	Séries chrono.	Séries chrono.	Projet Code_Aster	24	2	
Optim. conv. séq.	Projet Monte Carlo	Méthodes pour les EDP	Méthodes pour les EDP	24	2	Ingénierie 2
Réseaux Neuronaux	Finance 1	Projet optimisation	Projet optimisation	24	2	
Modèles à structure latente	Finance 1	Approf. C++	Approf. C++	24	2	

— **5MI05 - Spécialisation 1 : Bases de données VBA**
Professeurs : Maha Abdallah et Florian Pons (CRI4DATA)

— **5MI05 - Spécialisation 1 : Fiabilité**
Professeurs : Michèle Thieullen, Thomas Guillon (RTE)
Partie théorique (M. Thieullen) : Modèles semi-markoviens et processus déterministes par morceaux (PDMP).
Le but du cours et des séances de TD est de passer en revue certains aspects théoriques des modèles fondamentaux en fiabilité. On y abordera les chaînes de Markov, le processus de Poisson, les processus de renouvellement, les processus semi-markoviens et de Markov déterministes par morceaux. Le fil conducteur est la notion de taux de hasard pour la modélisation d'événements aléatoires.

— **NXAN1. UE - Anglais (3 ECTS) (semestre S3)**
L'enseignement est assuré par le département de langues (pour IFMA et IMPE essentiellement en ligne, quelques ateliers en présence). Préparation

Table 6.5 – Enseignements du bloc d'option (UE Spécialisation 1 et 2)

Bloc de spécialisation 10 semaines 2j/semaine				21 janv- 29 mars		Nom d'UE
ISDS	IFMA	IMPE/proba	IMPE/meca	vol horaire	ects	
Base de données VBA	Base de données VBA	Base de données VBA	Modèles Math Bio	30	3	Spécialisation 1
Cours d'ouverture appliqués à l'écologie et l'apprentissage	Fiabilité	Fiabilité	FreeFEM++ Projet Collaboratif	30	3	
Statistiques Industrielles	Machine learning	Machine learning	Machine learning	15	1.5	Spécialisation 2
	Finance 2	Projet Python	Projet Python	15	1.5	
Calcul Parallèle		Calcul Parallèle	Calcul Parallèle	30	3	

au test Toeic, ou Anglais professionnel.

— **5MI20. UE - Stage ingénierie long (18 ECTS) (semestre S4)**
Professeurs : Frédérique Charles et Cindy Guichard (pour IMPE), Lokmane Abbas-Turki et Vincent Lemaire (pour IFMA), Jean-Patrick Baudry et Olivier Wintenberger (pour IDSD)
Objectifs de l'UE : Cette expérience professionnelle, la première de cette ampleur par la durée et le niveau des tâches effectuées, est essentielle pour l'insertion ultérieure des étudiants dans le marché du travail. Elle est très valorisante et leur permet aborder la recherche du premier emploi avec un bagage scientifique et professionnel consistant. Pour les étudiants qui effectuent un stage de qualité en centre de recherche, elle peut éventuellement leur donner la possibilité d'obtenir une bourse de thèse pour continuer le travail de recherche appliquée initié pendant le stage, ou d'aborder un travail sur des thématiques proches dans une autre équipe.
Thèmes abordés : Immersion totale dans l'entreprise, dans un secteur correspondant à la majeure suivie : banque, assurance, sociétés de conseil, SSII, services de statistiques dans des établissements divers,...) ou pour la majeure IMPE dans un centre de recherche public (CEA, IFPen, INRIA, ONERA) ou du secteur industriel (automobile, aéronautique, BTP, énergie, télécom, transport, électronique,...).
Suivi pédagogique assuré par un enseignant de la formation, rédaction d'un rapport, soutenance officielle devant un jury composé des responsables de majeure et de l'encadrant du stage en entreprise.

Unités communes à IFMA et ISDS

- **5MI02 - Méthodes mathématiques pour la modélisation : Calcul stochastique**
  Professeur : Vincent Lemaire
  Martingales à temps discret, martingales à temps continu, convergences et théorème d'arrêt. Mouvement brownien, propriété de Markov et propriété de martingale. Intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien, formule d'Itô, théorème de Girsanov. Introduction aux équations différentielles stochastiques, équations à coefficients lipschitziens, diffusions et propriété de Markov.

Unités communes à IFMA et IMPE

- **5MI02 - Méthodes mathématiques pour la modélisation : Méthodes de Monte-Carlo**
  Professeur : Idris Kharroubi
  Objectifs : Méthodes de Monte-Carlo.
  Prérequis : Notions de base en probabilités.
  Généralités sur les méthodes de Monte Carlo (Loi des grands nombres, vitesse de convergence et intervalles de confiance), simulation de variables et vecteurs aléatoires (inversion, rejet, transformation, variables corrélées), réduction de variance (variables de contrôle et antithétique, stratification, fonction d'importance), méthodes de quasi-Monte Carlo (discrépance, exemples de suites à discrépance faible), calcul de sensibilité (différences finies, différentiation et log-vraisemblance).
- **5MI03 - Outils math. pour l'ingénierie : Analyse de Données**
  Professeur : Yassin Mazroui
  Consolidation des connaissances théoriques et pratiques (TP avec le logiciel R) d'Analyse de données et de Statistique appliquée. L'objectif est de permettre aux étudiants d'acquérir les bons réflexes avant d'analyser une base de données, d'avoir une palette assez large de méthodes d'analyse, de connaître les limites d'application de ces méthodes.
  Programme :
  - Analyse descriptive (numérique et graphique)
  - Tests paramétriques et non-paramétriques d'égalité de moyennes (Student, Mann-Whitney), d'égalité de proportions (Chi-2, Fisher exact) pour 2 échantillons indépendants et appariés
  - ANOVA à un et deux facteurs, ANCOVA, test de Krukal-Wallis
  - Modèles de régression linéaire simple et multiple, test de corrélation linéaire
  - Modèles de régression logistique simple et multiple, notion de rapport de côte
  - Analyse exploratoire : Analyse en Composante Principale
  - Analyse de survie (survenue d'un événement : décès, panne d'une machine,...)
- **5MI03 Outils math. pour l'ingénierie : Séries temporelles**

Professeur : Jean-Patrick Baudry
Introduction aux méthodes statistiques de traitement de données temporelles : propriétés au second ordre d'une série temporelle ; stationnarité et stationnarisation ; tendance et saisonnalité ; fonction d'autocovariance ; prédiction linéaire ; modèles paramétriques : AR, MA, ARMA.

— **5MI03 - Outils math. pour l'ingénierie : Langage Python**
Professeur : Baptiste Gregorutti
— **5MI06 - Spécialisation 2 Machine Learning**
Professeur : Ana Karina Fermin Rodriguez
Objectifs de l'UE : Ce cours est une introduction à l'apprentissage statistique supervisé : la construction de prédictions automatisées à partir d'une base d'exemples de bonnes prédictions. Nous décrirons le cadre théorique et présenterons les méthodes les plus classiques. Un accent sera mis sur le choix et la validation de ces méthodes à l'aide des données elle-mêmes. Le cours est illustré par des exemples dans le langage Python. Il se valide par un projet avec Python sur des données réelles.

Unité commune à IMPE et ISDS

— **5MI06 - Calcul parallèle**
Professeur : Xavier Juvigny (ONERA)
Architectures parallèles, architecture de la mémoire (partagée, hiérarchique, distribuée, hybride, etc...).
Modèles de programmation, OpenMP pour l'environnement mémoire partagée et MPI pour la mémoire distribuée.
Algorithmes parallèles distribués dans le contexte de résolution de grands systèmes linéaires pleins ou creux, par méthodes directes ou itératives. Approches de découpage par blocs pour des matrices pleines ou par décomposition de graphe (de la matrice ou du maillage) pour des matrices creuses.
Tous les TD se font en Python avec MPI, de même que les projets.

Unités spécifiques à IMPE

— **Enseignements de mécanique répartis sur les 3 blocs**
  — **5MI02 - Introduction à la mécanique des milieux continus. Mécanique des solides.**
  Professeur : Julien Waeytens (Université Gustave Eiffel) Initiation à la mécanique des milieux continus : cinématique, déformations, efforts intérieurs (approche classique), bilans, lois de conservation.
  — **5MI03 - Initiation Code_Aster** et **5MI06 - Projet Code_Aster.**
  Professeurs : Thomas Douillet-Grellier et Yi Zhang (EDF - R&D)
  Initiation et utilisation d'un code de calcul utilisé dans l'industrie.
  — **5MI05 - Spécialisation 1 :**
  Modèles Mathématiques appliqués à la biologie
  Professeur : Miguel Fernandez (Inria)
  Ce cours abordera quelques problèmes rencontrés en mécanique des fluides

en sciences du vivant, dans leur analyse mathématique et sur leur simulation numérique. Plusieurs types de modèles représentant différentes échelles physiques seront présentés :
équation de Vlasov : méthode des caractéristiques, régularité des solutions, résolution numérique d'équations différentielles,
équations de (Navier-)Stokes : résultats théoriques, méthodes numériques, discrétisation par éléments finis.
On terminera le cours en étudiant les problèmes spécifiques liés au couplage de ces deux équations du point de vue de la méthodologie mathématique et de la mise en ÅŞuvre numérique.
Initiation FreeFEM++.
Professeur : Rachida Chakir (Université Gustave Eiffel)
Les développements numériques du cours précédent seront faits à l'aide du logiciel FreeFem++, auquel les étudiant-e-s seront initié-e-s dans des séances de TP dédiées.
Projet collaboratif
Professeur : Stéphane Labbé
Ce projet propose de traiter une géométrie complexe en mécanique des fluides afin d'étudier un système de séparation de liquides. Le programme de travail inclura la génération de maillages et la discrétisation de flux de liquides via une méthode d'éléments finis (langages Python et C/C++).

Prérequis : Il n'est pas nécessaire que le cursus suivi comporte une initiation aux thèmes fondamentaux pour la mécanique des milieux continus, solides et fluides.

- **Analyse numérique et calcul scientifique répartis sur les 3 blocs**
  - **5MI02 - Optimisation**
    Professeur : Marie Postel
    Les objectifs du cours sont
    - Le rappel (ou la découverte) de quelques méthodes et algorithmes d'optimisation continue, dans le cas sans contraintes (gradient, Newton) et avec contraintes (extréma liés, théorème de Karush Kuhn Tucker)
    - L'utilisation d'un logiciel scientifique en langage interprété très utilisé dans les entreprises pour appliquer directement les méthodes numériques vues en cours.
  - **5MI04 - Méthodes pour les EDP**
    Professeur : Frédérique Charles
    Méthodes particulaires pour les équations d'advection-diffusion. Les équations aux dérivées partielles de type advection-diffusion sont couramment rencontrées dans de nombreux domaines scientifiques et d'ingénierie : modélisation atmosphérique, hydrodynamique, physique des plasmas... Les méthodes particulaires, qui sont une approche numérique basée sur le suivi de particules fictives pour approximer les solutions de ces équations, sont conceptuellement simples et robustes. Nous nous intéresserons d'une part aux méthodes déterministes (basées sur les courbes caractéristiques des équations de transport) et d'autre part aux méthodes stochastiques.

- **5MI04 - Projet d'optimisation**
  Professeur : Max Cerf (ingénieur Airbus Defence & Space)
  5MI04 - Approfondissement C/C++
  Professeur : Guillaume Delay
- **5MI06 - Projet Python**
  Professeur : Xavier Juvigny (ONERA)
  Enseignement en lien avec le cours de Calcul parallèle
- **5MI05 - Projet collaboratif**
  Professeur : Stéphane Labbé
  5MI05 - FreeFem++
  Professeur : Rachida Chakir (Université Gustave Eiffel)

Unités spécifiques à IFMA

- **5MI04 - Ingénierie 2 : Finance 1**
  - **Marchés complets**
    Professeur : Shen Lin
    Thèmes abordés : Marchés financiers et valuation d'options en marchés complets. Introduction à la couverture de produits dérivés et à la gestion de portefeuille en marchés complets dans les modèles de diffusions browniennes, modèle de Black-Scholes généralisé, lien avec les EDP, modèles de taux.
  - **Marchés incomplets**
    Professeur : Camille Tardif
    Thèmes abordés : Finance avancée : gestion du risque et marchés incomplets : Modèles de la courbe des taux, modèles de volatilité locale, modèles de volatilité stochastique, options exotiques, risque de défaut, modèles de crédit, marchés incomplets.
- **5MI06 Spécialisation 2 : Finance 2**
  Actuellement composée de 4 cours assurés par des intervenants extérieurs

  - **Interprétation du smile en terme de risk**
    Professeur : Didier Faivre (CACIB, didier.faivre2@gmail.com)
    L'évaluation de plusieurs produits dérivés, notamment les CMS et les options sur CMS mais aussi les produits options barrières et Quanto est expliquée é partir de stratégies de réplication. Au préalable, des rappels détaillés sont faits sur la construction de courbe de taux et les produits dérives vanille de tauxÂă(Caps, Floors, Swaptions)Âă : définition, évaluation pratique en salle des marchés. L'ensemble des séances est systématiquement partagé entre exposés et exercices sous Excel.
  - **Produits dérivés de taux**
    Professeur : Aych Bouselmi (aych.bouselmi@gmail.com)
    Le cours aborde la modélisation de certaines courbes de taux ainsi que différents modèles stochastiques de taux. On y voit notamment comment ces derniers sont construits, calibrés et utilisés dans les usages quotidien de la banque. On se donne pour but de construire, é partir de donnés de

marché liquides, un framework dans lequel on est capable de calculer les prix de différents produits présents ou pas dans le marché de départ.

- **Gestion de Portefeuille**
  Professeur : Simon Mauffrey (LBPAM, mauffrey@me.com)
  Introduction é la gestion d'actifs (présentation des classes d'actifs, phases d'allocation, styles de gestionâĂę). Réalisation d'un outil d'allocation stratégique basé sur la modélisation et calibration des principales classes d'actifs (modèles économétriques AR/MA/ARMA et ARCH/GARCH) et la construction de portefeuilles (réalisation de simulations de Monte Carlo et calcul d'indicateurs de risques et de performance).
- **Commodities et Energy derivatives**
  Professeur : Olivier Bardou (GRDF et LPSM, olivier.bardou@grdf.fr)
  Ce cours est une introduction aux marchés des énergies et aux méthodes actuellement développées pour répondre aux questions de valorisation de produits dérivés et de gestion des risques qui s'y rencontrent. Le programme du cours est le suivant :
  - Présentation des marchés du pétrole, du gaz, de l'électricité, du charbon et des émissions.
  - Modèles de prix pour les énergies et les émissions.
  - Valorisation et couverture des produits dérivés sur les marchés de l'énergie.
  - Valorisation et gestion des actifs réels (options swing, stockages, CCGTâĂę).
  - Gestion du risque (financier, physique et climatique).

- **5MI04 - Ingénierie 2 : Projet Monte-Carlo**
  Professeur : Vincent Lemaire
  Thèmes abordés : Méthodes de Monte-Carlo pour l'évaluation des produits dérivés et la gestion des risques. Discrétisation de processus de diffusion, approximation de pay-offs complexes, calcul de sensibilités, calcul de mesure de risque (VaR, CVar, etc.). Techniques récentes en probabilités numériques : nested Monte Carlo et multilevel Monte Carlo. Evaluation sous forme d'un projet.

Unités spécifiques à ISDS

- **5MI02 Méthodes mathématiques pour la modélisation : Apprentissage Statistique**
  Professeur : Ismael Castillo et Erwan Scornet
  Objectif : Dans ce cours, nous explorerons différents algorithmes dâĂŹapprentissage supervisés, par le prisme de la théorie statistique et des implémentations sur machine. La théorie générale de lâĂŹapprentissage statistique nous permettra de comprendre le rÃťle des différents hyperparamètres sur les performances des méthodes. Les algorithmes les plus classiques seront décrits et étudiés (plus proches voisins, méthodes dâĂŹensembles basées sur les arbres). Certaines séances donneront lieu Ãă des implémentations sur machine permettant de comparer les performances des différentes méthodes.

LâĂŹévaluation finale se composera dâĂŹun examen écrit (semaine du 11 décembre) et dâĂŹune soutenance orale (avec rapport écrit) dâĂŹun projet de type Kaggle (semaine du 8 janvier).

— **5MI03 Outils math. pour l'ingénierie : Optimisation convexe séquentielle**
  Professeur : Pierre Gaillard et Joseph de Vilmarest
  L'objectif de ce cours est d'étudier la convergence de nombreux algorithmes en ligne, d'abord dans un cadre déterministe puis aléatoire. Il sera démontré que l'apprentissage séquentiel fournit des solutions adaptatives et robustes à de nombreux problèmes d'optimisations convexes sous contraintes. La convergence des algorithmes étudiés sera illustrée sous R dans le cadre de la classification des données MNIST.
  Prérequis : Notions fondamentales de probabilités et statistique, calcul scientifique sous Python ou R
  Thèmes abordés
  — Introduction à l'optimisation convexe dans un cadre séquentiel
  — Projection sur le simplexe, parcimonie
  — Algorithmes du premier et du second ordre
  — Régularisation et algorithmes libres de projection
  — Problème du bandit
  — Apprentissage dans un cadre stochastique

— **5MI03 Outils math. pour l'ingénierie : Contrôle qualité**
  Professeur : Mitra Foularidad (UTT)
  Thèmes abordés :
  — Tests statistiques
  — Introduction des outils de Contrôle Statistique des procédés (histogramme et arbre d'événement, feuille de contrôle, diagramme de Pareto)
  — Cartes de contrÃťles (les cartes R, S, p, np,c, etc)
  — Cartes de contrôle en présence de données corrélées.
  — Méthodes d'échantillonnage pour le contrôle de qualité.

— **5MI04 Statistique et apprentissage pour la prévision.**
  Professeur : Margaux Bregere
  Les cours porterons sur :
  — Rappels de régression et régularisation
  — Modèles additifs généralisés
  — Forêts Aléatoires
  — Boosting
  — Réseau de neurones
  — Stacking et agrégation d'experts
  — Enjeux et méthodes pour la prévision probabiliste et la simulation (qgam, autoencodeurs, GANs)
  L'ensemble des cours s'appuyera sur des TP en R et Python appliqués à la prévision de consommation électrique. L'évaluation se fera sous forme de projet.

— **5MI04 Ingénierie 2 : Modèles à structure latente**
  Professeur : Jean-Patrick Baudry

Classification non supervisé ; Approches algorithmiques : k-means, classification hiérarchique ; Approche probabiliste basée sur les modèles de mélange ; Algorithme EM ; Approche bayésienne ; Gibbs, Metropolis-Hastings.

— **Réseaux Neuronaux**
Professeure : A. Valibouze
Objectifs : Fondements et principes des réseaux neuronaux jusqu'à l'apprentissage automatique. Etude et description des principaux réseaux : modèles historiques, à compétitions, réseaux profonds (Deep learning) : Perceptron Multi-Couches, PMC, (DNN), convolutionnels (CNN) et DBN. Pratique logicielle précisée plus bas. S'appuyant sur les projets individuels, une partie du cours se réalise en pédagogie inversée. De par la remise d'un projet individuel et de sa présentation orale, l'étudiantE acquiert à la fois la compétence orientée statistique dans l'usage des réseaux neuronaux pour le traitement des grandes masses de données (Big Data) ainsi qu'une autonomie (pédagogie inversée) et un savoir faire dans la présentation d'exposés scientifiques.
Prérequis : La partie théorique est accessible à tous. Avoir pratiqué un logiciel scientifique, tel R, est recommandé.
Evaluation : Un devoir logiciel, un projet individuel (parties théorique et logicielle), exposé avec démos interactives. La présence est obligatoire à tous les cours.
Pratique logicielle :
  — Cours : Fonctionnalités neuronales du logiciel de R
  — Devoir : implémentation d'un réseau de neurones symétrique et de ses trajectoires dans un des deux systèmes de Calcul Formel libres suivants : SageMath et Maxima.
  — Projet : Utilisation de plusieurs logiciels disposant de fonctions dédiées aux réseaux neuronaux avec comparaison avec des méthodes statistiques connues.

  1. Partie 1 : Fondements et applications
     — Historique et Définitions. Modèle de McColloch et Pitts (1943)
     — Fonctionnement et principes. Exemple du réseau symétrique de Hopfield
     — Comportements dynamiques - Fonction de Lyapunov
     — Erreur et apprentissage. Exemples.
     — Application : Analyse des données (Data Mining)
  2. Partie 2 : Des modèles classiques à l'apprentissage profond. Théorie et Pratique.
     — Quelques règles d'apprentissage sur les poids et sur le pas d'apprentissage
     — Le Perceptron de F. Rosenblatt (1958) et ses limites ; l' Adaline ; réseaux à compétition ; réseaux symétriques
     — Le Perceptron Multi-Couches dit PMC
     — Réseaux Âń Radial Basis Function Âż dits RBF (fonctions à noyaux)
     — La machine de Bolzmann Restreinte dite RBM
     — Apprentissage sur réseaux déjà entraînés : Corrélation en cascade et Neurochirurgien Optimal (OBS)

    — Apprentissage Profond : DNN, CNN, DBN, GAN
    — Fonctionnalités neuronales du Logiciel R (PMC, réseaux RBF)
3. Partie 3 : Pédagogie Inversée via les présentations des projets.

— **5MI06 - Spécialisation 2 : Statistiques industrielles**
  — **Plans d'expériences**
    Professeurs : Maeva Biret, Catherine Duveau, Ingénieures statisticiennes SAFRAN
    — Rappels d'analyse de la variance
    — Plans factoriels multiples
    — Plans latin, gréco-latin
    — Applications industrielles
  — **Pratique de la fiabilité**
    Professeur : Emmanuel Rémy, chercheur expert, EDF R&D, Département "Performance, Risques Industriels, Surveillance pour la Maintenance et l'Exploitation"
    Contexte : assurer la sûreté et la performance des systèmes industriels et limiter leur impact sur l'environnement sont des enjeux majeurs pour tous les industriels, quel que soit le secteur d'activités (agroalimentaire, armement, aéronautique, automobile, chimie, énergie, ferroviaire, métallurgie, pharmaceutique…). De tels objectifs passent nécessairement par une évaluation précise de la fiabilité des équipements, c'est-à-dire leur aptitude à ne pas tomber en panne. Les méthodes probabilistes et statistiques sont des outils bien adaptés pour quantifier les risques de défaillance. En fonction des connaissances disponibles, différentes approches sont envisageables : fréquentistes pour traiter les données de retour d'expérience d'exploitation et de maintenance des matériels, bayésiennes pour tirer profit de dires de spécialistes métier, ou structurelles pour manipuler les résultats de calculs de modèles ou de codes de simulation numérique de phénomènes physiques. Le cours a pour ambition de présenter les techniques de base utilisées dans les trois types d'approches, en adoptant une orientation délibérément applicative : ainsi, de multiples exemples d'études issus des centrales de production d'électricité d'EDF illustrent l'intervention. À noter qu'un grand nombre des méthodes présentées dans le cours sont appliquées dans d'autres domaines pour d'autres finalités, comme l'actuariat ou l'épidémiologie.
    Objectifs : acquérir les concepts et les méthodes probabilistes et statistiques de base pour l'évaluation de la fiabilité des matériels industriels
    Moyens :
    — Cours magistral
    — Exercices en cours (et facultatifs entre chaque séance)
    — Cas d'étude EDF pour illustration
    — Outils logiciels
    — Références bibliographiques
    Prérequis : cours
    — Mesure, intégration, probabilités
    — Optimisation

  - Modélisation stochastique
  - Statistique inférentielle
  - Modèles à structure latente

  Structure : 4 parties
  - Concepts élémentaires (~3 heures)
  - Fiabilité fréquentiste (~9 heures)
  - Fiabilité bayésienne (~5 heures)
  - Fiabilité structurelle (~6 heures)

  Validation des acquis : réalisation d'un projet d'étude avec soutenance
- **Modèles statistiques pour l'écologie (Cours d'ouverture 1)**
  Professeur : Stéphane Robin
  Objectif : L'écologie s'intéresse aux relations que les espèces vivantes entretiennent entre elles et avec leur milieu. L'analyse et la compréhension de ces interactions passe fréquemment par une modélisation statistique visant à décrire les structures et les processus qui sous-tendent ces interactions. L'objectif de ce cours est de présenter certains de ces modèles comme les modèles de distributions (jointes) d'espèces ou les modèles de réseaux écologiques. Les modèles les plus simples sont des modèles linéaires généralisés, éventuellement mixtes. Les modèles plus complexes sont souvent des modèles à variables latentes qui posent des problèmes d'inférence spécifiques qui seront discutés. De même la distinction entre interactions directes ou indirectes entre les espèces peut être reformulée en termes de modèle graphique, faisant ainsi le lien avec des méthodes plus générales d'inférence de réseaux.
  Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, connaissance de R.
  Thèmes abordés :
  1. Modèles à variables latentes, modèles graphiques
  2. Modèles de distribution d'espèces
  3. Modèles de réseaux écologiques
- **Méthodes de simulation pour les modèles génératifs (Cours d'ouverture 2)**
  Professeur : Sylvain Le Corff
  Objectif
  La simulation de variables aléatoires en grande dimension est un véritable défi pour de nombreux problèmes de machine learning récents et pour l'apprentissage de modèles génératifs profonds. Ce problème se rencontre par exemple dans un contexte bayésien lorsque la loi a posteriori n'est connue qu'à une constante de normalisation près, dans le cadre des auto encodeurs variationnels ou encore pour la métamodélisation de systèmes dynamiques complexes.
  De nombreuses méthodes sont basées sur des approches de type "Importance Sampling" ou "Sequential Monte Carlo" dont nous rappelerons les éléments principaux. Pour surmonter les faiblesses inhérentes à ces méthodologies en grande dimension ou pour les modèles génératifs profonds (à base de réseaux récurrents, réseaux denses ou convolutifs), nous étudierons dans ce cours de

récentes solutions en mettant l'accent sur les aspects méthodologiques. Le fonctionnement de ces méthodes sera illustré à l'aide de jeux de données publics pour des problématiques de "computer vision" et de prédictions de séries temporelles.
Prérequis :
— Notions fondamentales de probabilités et statistique.
— Notions concernant les méthodes de Monte Carlo.
— Notions sur les chaînes de Markov.
Thèmes abordés
— Rappels sur les modèles de Markov cachés et leur inférence (score de Fisher, algorithme Expectation Maximization).
— Méthodes de Monte Carlo séquentielles (filtrage et lissage) pour les modèles à espace d'état.
— Méthodes de Monte Carlo séquentielles variationnelles.
— Flots normalisants et "neural importance sampling".
— Estimation variationnelle en ligne.

6.6 Responsables et sites

Responsable du parcours : Vincent Lemaire
https://www.lpsm.paris/M2IngMath/
Responsables des majeures :
- majeure IMPE : Frédérique Charles et Cindy Guichard
https://www.lpsm.paris/M2IngMath/impe/
- majeure IFMA : Vincent Lemaire et Lokmane Abbas-Turki
https://www.lpsm.paris/M2IngMath/ifma/
- majeure ISDS : Jean-Patrick Baudry et Olivier Wintenberger
https://www.lpsm.paris/M2IngMath/isds/
Secrétariat : Francelise Hardoyal
francelise.hardoyal@sorbonne-universite.fr
Campus Jussieu, 15-14, 2e étage, bureau 206 - tél. : 01 44 27 51 14
Responsable pédagogique pour les apprentis : Nathalie Obert-Ben Taieb
nobert@cfa-sciences.fr
Secrétariat CFA des Sciences, Tel 01 44 27 71 40

Chapitre 7

Master 2, Parcours Statistique

Site web : https://m2stat.sorbonne-universite.fr/

7.1 Objectifs et description

La statistique, ou encore la science des données, est devenue incontournable dans notre société. L'exploitation des grandes masses de données (big data) est désormais systématisée dans des domaines aussi variés que l'économie, la médecine, l'internet, l'écologie ou l'astrophysique. Le métier de statisticien, statisticienne ou encore "data scientist ? joue un rôle clé dans l'analyse raisonnée de ces données. D'une part, la statistique s'attache à fournir des modèles de prédiction et d'estimation interprétables dans un cadre mathématique rigoureux. D'autre part, la statistique doit proposer des algorithmes efficaces et des méthodologies dédiées à tout domaine d'application. Le parcours Statistique vise à former les statisticiennes, statisticiens, "data scientists", de demain en offrant un large éventail de cours qui va de l'apprentissage statistique à la statistique mathématique, couvrant ainsi les fondements de la théorie statistique et la pratique de la science des données. Plus précisément, le parcours Statistique offre une formation (i) académique, au travers d'un enseignement constitué à la fois de cours, travaux dirigés, travaux pratiques et projets, et (ii) professionnalisante, en synergie avec les acteurs français et internationaux de la science des données, notamment avec la réalisation d'un stage de 6 mois au sein d'une entreprise ou d'un laboratoire de recherche.

Le parcours Statistique est hébergé au Laboratoire de Probabilités, Statistique et Modélisation (LPSM), véritable ancrage dans le monde statistique académique, permettant aussi des collaborations industrielles. De ce fait, les cours sont dispensés par des chercheuses et chercheurs en statistique de premier plan, ce qui garantit un contenu de grande qualité et ouvrant sur des méthodes statistiques de pointe. De plus, cette formation s'attache spécifiquement à garder de manière permanente une tension entre rigueur mathématique et faisabilité pratique des procédures, en ne négligeant aucun de ces deux aspects. En effet, il est inscrit dans l'ADN du parcours Statistique que la théorie et la pratique sont deux facettes d'une même pièce, qui ont vocation à s'enrichir mutuellement.

7.2 Débouchés professionnels

Cette double formation, théorique et appliquée, est toute aussi professionnalisante qu'à visée académique. Elle permet aux diplômés de s'orienter d'une part vers un emploi hautement qualifié en entreprise dans des secteurs très variés faisant appel à des statisticiennes, statisticiens et data scientists. D'autre part, elle permet aussi d'envisager une carrière dans la recherche, notamment de par la poursuite en thèse CIFRE industrielle, ou en thèse académique à l'université ou dans un institut de recherche.

7.3 Organisation

Chaque étudiante et étudiant concourt pour 60 ECTS annuels qui se décomposent en

— 30 ECTS pour l'UE de **Cours Fondamentaux**, au premier semestre ;
— 12 ECTS pour l'UE de **Spécialisation**, au second semestre ;
— 18 ECTS pour l'UE de **Stage**, en entreprise ou en milieu académique, d'avril à septembre.

Pour l'UE de **Spécialisation**, les étudiants et étudiantes sélectionnent 4 cours parmi les enseignements proposés.

Les cours de mise à niveau et le cours de Data science en pratique ne font pas partie de l'évaluation.

Les examens ont lieu à l'issue de chaque UE. Des rattrapages sont organisés au mois de juin pour les étudiants et étudiantes n'ayant pas obtenu de notes suffisantes à la première session. Il n'y a pas de compensation entre les semestres.

7.4 Publics visés, prérequis

Le parcours s'adresse à des étudiantes et étudiants ayant une formation solide au niveau M1 en **mathématiques**. En particulier, la spécialité accueille des étudiantes et étudiants de Sorbonne Université ayant validé leur première année du Master Mathématiques et Applications, ainsi que des étudiantes et étudiants de formations externes à Sorbonne Université mais de niveau jugé équivalent.

L'admission à la spécialité est accordée après examen du dossier. Il est nécessaire que la première année de Master (ou de formation équivalente) comporte des unités de mathématiques appliquées et une initiation à la programmation. Plus précisément, l'étudiant ou l'étudiante doit avoir de solides connaissances en **statistique, probabilités et informatique**, à savoir la maîtrise d'un langage de programmation (R, python, etc.), une expérience en logiciel, etc. Des bases solides en analyse et en algèbre linéaire sont également exigées.

Par ailleurs, l'enseignement est très majoritairement assuré en langue française, mais quelques cours peuvent être enseignés en anglais à la discrétion des enseignants. Les supports de cours ainsi que la littérature sont souvent en anglais. Les cours, les travaux pratiques, et certains travaux en équipe, sont obligatoires. Une bonne connaissance du français et de l'anglais est donc requise.

7.5 Description des UE

7.5.1 Mise à Niveau

Tous les cours de la Mise à Niveau sont obligatoires et ont lieu en septembre.

Cours 1 : Statistique mathématique

Responsable : A. Godichon-Baggioni
Contacts : antoine.godichon_baggioni@sorbonne-universite.fr
Page web : http://godichon.perso.math.cnrs.fr/
Objectifs : réviser les notions de statistique mathématique.
Prérequis : notions fondamentales de probabilités, statistique, analyse et algèbre linéaire.
Thèmes abordés :

1. Rappels de probabilités
2. Méthodologie statistique : estimation, intervalles de confiance et tests
3. Modèle linéaire, vecteurs gaussiens, modèle linaire gaussien

Cours 2 : Outils d'optimisation

Responsable : C. Boyer
Contacts : claire.boyer@sorbonne-universite.fr
Page web : https://perso.lpsm.paris/~cboyer/
Objectifs : introduire les outils de base de l'optimisation.
Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, analyse et algèbre linéaire. Thèmes abordés :

1. Rappels de calcul différentiel et d'algèbre matricielle
2. Minimisation de fonctions convexes via la dualité Lagrangienne
3. Introduction à l'analyse convexe : sous-gradient, dualité de Fenchel-Legendre
4. Descente de gradient, de sous-gradient, et gradient stochastique

Cours 3 : Programmation en R

Responsable : A. Bonnet
Contacts : anna.bonnet@sorbonne-universite.fr
Page web : https://anna.biogeek.land/
Objectifs : programmer en R et utiliser des méthodes statistiques sous R.
Prérequis : quelques notions de programmation.

Cours 4 : Programmation en Python

Responsable : M. Sangnier
Contacts : maxime.sangnier@sorbonne-universite.fr
Page web : https://perso.lpsm.paris/~msangnier/index.html

Objectifs : programmer en Python et utiliser des méthodes statistiques en Python.

Prérequis : quelques notions de programmation.

7.5.2 Cours Fondamentaux

L'UE de Cours Fondamentaux (MU5MAS02) a lieu au premier semestre, entre septembre et décembre, et totalise 30 ECTS.

Cours 1 : Apprentissage statistique

Responsable : G. Biau

Contact : gerard.biau@sorbonne-universite.fr

Page web : https://perso.lpsm.paris/~biau/

Objectif : présenter les grands principes de l'apprentissage statistique et les problématiques liées.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique.

Thèmes abordés :

1. Introduction au problème de la classification supervisée
2. Principe de minimisation du risque empirique, théorie de Vapnik-Chervonenkis
3. Bornes de performance, pertes convexes, sélection de modèle
4. Classification non paramétrique, théorème de Stone, plus proches voisins, arbres
5. Classification par réseaux neuronaux
6. Quantification et clustering

Cours 2 : Modèle linéaire et grande dimension

Responsable : E. Roquain

Contact : etienne.roquain@sorbonne-universite.fr

Page web : https://etienneroquain-81.webself.net/

Objectif : appréhender les problématiques issues de la grande dimension dans le modèle linéaire.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, logiciel R.

Thèmes abordés :

1. Seuillage et hypothèse de parcimonie (sparsité)
2. Estimateurs pénalisés : ridge et LASSO
3. Régression logistique, régression Poisson, modèle linéaire généralisé
4. Sélection et contrôle du taux de faux positifs
5. Prédiction conformelle

Le cours sera également ponctué de parties TP et TD.

Cours 3 : Estimation non-paramétrique

Responsables : I. Castillo et C. Dion

Contacts : ismael.castillo@sorbonne-universite.fr et charlotte.dion@sorbonne-universite.fr
Page web : https://perso.lpsm.paris/~castillo/
Page web : https://sites.google.com/site/charlottedionblanc/

Objectif : présenter des méthodes classiques d'estimation non-paramétrique, étudier le comportement des estimateurs introduits pour différents risques, introduire l'optimalité des vitesses de convergence au sens minimax. Les notions introduites seront illustrées dans des exemples de modèles statistiques très utilisés en pratique : estimation de densité, régression non-paramétrique, signal en bruit blanc gaussien, modèles de graphes aléatoires.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités, bases de statistique, estimation paramétrique, bases d'analyse fonctionnelle (cas Hilbert au moins).

Thèmes abordés :

1. Estimation non-paramétrique de densité
2. Modèles de bruit blanc, de régression et de convolution
3. Sélection de paramètres
4. Seuillage et estimateurs par ondelettes
5. Modèles de graphes aléatoires
6. Bornes inférieures de vitesses au sens minimax
7. Régions de confiance non-paramétriques

Cours 4 : Introduction à l'apprentissage automatique

Responsable : M. Sangnier
Contact : maxime.sangnier@sorbonne-universite.fr
Page web : https://perso.lpsm.paris/~msangnier/index.html

Objectif : ce cours introduit les principales méthodes de prédiction (classification et régression), de partitionnement et de réduction de dimension. Il présente l'apprentissage statistique d'un point de vue algorithmique et sera illustré par des travaux pratiques (en Python) ainsi que par un challenge en science des données.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, analyse convexe, algèbre linéaire, calcul scientifique en Python.

Thèmes abordés :

1. Analyse discriminante, régression logistique, machines à vecteurs supports.
2. k-plus proches voisins, arbres de décision et méthodes ensemblistes (forêts et boosting).
3. Modèle de mélange et algorithme EM, k-moyennes, partitionnement spectral et hiérarchique.
4. Analyse en composantes principales, projections aléatoires et positionnement multidimensionnel.

Cours 5 : Optimisation stochastique & généralisation pour le ML

Responsable : C. Boyer
Contact : claire.boyer@sorbonne-universite.fr

Page web : https://perso.lpsm.paris/~cboyer/

Objectif : L'objectif de ce cours est d'étudier la convergence de nombreux algorithmes stochastiques (séquentiel ou mini-batch) dans le cadre de l'apprentissage supervisé. Des séances de travaux pratiques permettront de les implémenter en Python. Théoriquement, ces algorithmes permettent de contrôler l'erreur de généralisation des prédicteurs ainsi formés. Le cours comportera également des séances d'ouverture pour explorer le flot de gradient, la quantification de l'incertitude en terme de généralisation, et des algorithmes d'optimisation pour le transport optimal.

Prérequis : Notions fondamentales de probabilités et statistique, calcul scientifique en Python

Thèmes abordés :

1. Introduction à l'optimisation convexe
2. Algorithmes du premier et du second ordre
3. Algorithmes de gradient stochastiques
4. Apprentissage dans un cadre stochastique
5. Régularisation convexe
6. Prédiction conformelle

Tout au long de l'année a lieu un cours spécial, qui ne fait pas l'objet d'une évaluation :

Cours spécial : Data science en pratique

Responsables : A. Llau, R. Cousin, A. Bucci

Contacts : arthur@flowlity.com, raphaelcousin90@gmail.com, michele-alessandro.bucci@inria.fr

Page web : https://sites.google.com/site/arthurllau/home

Page web : https://github.com/racousin

Page web : https://fr.linkedin.com/in/michele-alessandro-bucci-b81023a3

Objectif : Présenter un ensemble de méthodes permettant à partir de données brutes de répondre à des problématiques concrètes en utilisant différents modèles de machine/deep learning à la pointe de l'état de l'art.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités, statistique et algèbre linéaire. Connaissance basique Python.

Thèmes abordés :

1. Analyse exploratoire et visualisation
2. Techniques de features engineering
3. Optimisation d'hyperparamètres
4. Sélection de modèles
5. Algorithmes de Machine Learning (SOTA)
6. Méta-learning et agrégation de modèles
7. Introduction à l'utilisation de modèles de deep learning (Vision, NLP, Reinforcement)

7.5.3 Spécialisation

L'UE de Spécialisation (MU5MAS03) a lieu au second semestre, entre janvier et mars, et totalise 12 ECTS. Les étudiantes et étudiants sélectionnent 4 cours parmi les enseignements proposés ci-dessous.

Cours 1 : Machine learning pour données médicales

Responsable : X. Tannier

Contact : xavier.tannier@sorbonne-universite.fr

Page web : http://xavier.tannier.free.fr/

Objectif : Le but de ce cours est de sensibiliser les étudiantes et les étudiants aux enjeux spécifiques de l'analyse et de la modélisation des données de santé, et en particulier des données médicales et cliniques, à travers des travaux sur des cas pratiques du domaine. Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, algèbre linéaire, apprentissage statistique, Python.

Thèmes abordés :

1. Médecine et apprentissage statistique (image, signal, texte, données structurées)
2. Cas d'usage sur diverses natures de données et de tâches
3. Interprétabilité des modèles
4. Inférence causale

Cours 2 : Modèles à variables latentes pour l'écologie

Responsable : S. Robin

Contact : stephane.robin@sorbonne-universite.fr

Page web : https://sites.google.com/view/srobin-lpsm/accueil

Objectif : L'écologie s'intéresse aux relations que les espèces vivantes entretiennent entre elles et avec leur milieu. L'analyse et la compréhension de ces interactions passe fréquemment par une modélisation statistique impliquant des variables latentes (c'est-à-dire non observées) visant à décrire les structures et les processus qui sous-tendent ces interactions.

L'objectif de ce cours est de présenter certains de ces modèles comme les modèles de distributions (jointes) d'espèces ou les modèles de réseaux écologiques. Les modèles les plus simples sont des modèles linéaires généralisés, éventuellement mixtes. Les modèles plus complexes posent des problèmes d'inférence spécifiques qui peuvent être surmontées grâce à des généralisations de l'algorithme EM. Un des objectifs principaux de ce cours est la bonne compréhension de tels modèles et la définition d'un algorithme permettant d'en inférer les paramètres

Nous utiliserons également la représentation de ces modèles selon le formalisme des modèles graphiques qui permettent de comprendre la structure de dépendance entre les différentes variables (observés ou latentes) et de d'anticiper la complexité de l'algorithme d'inférence. Cette représentation est par ailleurs pertinente pour traiter le problème de l'inférence de réseaux écologiques, dans lequel il s'agit notamment de distinguer entre interactions directes ou indirectes entre les espèces.

Certains des modèles présentés seront mis en oeuvre lors de séances de travaux dirigés sur machine.

Prérequis : Notions fondamentales de probabilités et statistique, connaissance de R.

Thèmes abordés :

1. Modèles à variables latentes, modèles graphiques.
2. Modèles de distribution d'espèces.
3. Modèles de réseaux écologiques.

Cours 3 : Optimisation stochastique

Responsable : A. Godichon-Baggioni et B-E Chérief-Abdellatif

Contact : antoine.godichon_baggioni@sorbonne-universite.fr
badr-eddine.cherief-abdellatif@cnrs.fr

Page web : http://godichon.perso.math.cnrs.fr

Page web :https://badreddinecheriefabdellatif.github.io/

Objectif : Ce cours est divisé en deux parties. La première partie s ?attache à présenter et analyser les méthodes stochastiques pour l ?optimisation numérique. La deuxième partie fournit un aperçu de la théorie PAC-Bayésienne, en partant de la théorie de l ?apprentissage statistique (bornes de généralisation et inégalités oracles) et en couvrant les développements algorithmiques par inférence variationnelle, jusqu ?aux analyses PAC-Bayésiennes récentes des propriétés de généralisation des réseaux de neurones profonds.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, notions d ?optimisation convexe, logiciel R ou python, notions élémentaires de théorie des probabilités et d ?apprentissage statistique.

Thèmes abordés :

1. Théorèmes de convergence pour les Martingales
2. Algorithmes de gradient stochastiques et applications
3. Généralisation en apprentissage statistique
4. Théorie PAC-Bayésienne
5. Inférence variationnelle
6. Bornes de généralisation en apprentissage profond

Cours 4 : Analyse statistique de graphes

Responsable : C. Matias

Contact : Catherine.Matias@math.cnrs.fr

Page web : https://cmatias.perso.math.cnrs.fr/

Objectif : L'analyse statistique des réseaux d'interaction (ou graphes) connaît de nos jours un fort développement dans des domaines très variés (internet, biologie, réseaux sociaux, etc.) avec des données de bien plus grande taille (quelques centaines, milliers, voire millions de noeuds). L'objectif du cours est d'apprendre à manipuler et modéliser des données de type réseaux ainsi que d'enseigner des méthodes de classification et inférence statistique sur des graphes. De nombreux TP sous R permettront de pratiquer l'analyse de graphes et de mettre en ¡uvre les méthodes statistiques.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, connaissance de R.

Thèmes abordés :

1. Statistiques descriptives élémentaires des réseaux et visualisation
2. Détection de communautés et de la classification des n¡uds
3. Modèles de graphes aléatoires et des méthodes d'inférence statistique

Cours 5 : Gestion des données

Responsable : O. Schwander
Contact : olivier.schwander@lip6.fr
Page web : olivier.schwander@sorbonne-universite.fr

Objectif : apprendre à charger et manipuler des données réelles, déployer une chaîne de traitement, comprendre les problèmes posés par la manipulation de données à large échelle. Ces points sont des préliminaires essentiels à l'intégration de méthodes statistiques avancées dans des applications réelles.

Prérequis : connaissances basiques d'un langage de programmation.

Thèmes abordés :

1. Systèmes de gestion des bases de données (SQL, noSQL)
2. Business Intelligence (ETL, Data Warehouse, OLAP)
3. Extraction de données sur le web (services web, scraping)
4. Paradigme MapReduce pour le Big Data (Spark, SPARKQL)

Cours 7 : Séries temporelles

Responsable : F. Guilloux
Contact : frederic.guilloux@sorbonne-universite.fr
Page web : https://www.lpsm.paris/users/fguilloux/index

Objectif : Initiation aux modèles mathématiques de séries temporelles, visant à étudier des données dont la structure est déterminée par les corrélations au cours du temps. Sans chercher à multiplier les concepts et les modèles, ni viser à la maîtrise de l'ensemble des méthodes utilisées en pratiques, l'ambition sera d'acquérir une bonne connaissance des idées mathématiques à la base de ces modèles, en mêlant l'intuition à la rigueur mathématique.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités, statistique et algèbre linéaire. Connaissance basique de R ou Python.

Thèmes abordés :

1. Les données temporelles et leur modélisation
2. Structure de corrélation entre les variables, ttationnarité et conséquences
3. Prévision linéaire
4. Modèles ARMA
5. Compléments : Analyse spectrale, tests, séries multidimensionnelles, modèles à espaces d'état

Cours 7 : Statistique bayésienne non paramétrique

Responsable : I. Castillo
Contact : ismael.castillo@sorbonne-universite.fr
Page web : https://perso.lpsm.paris/~castillo/

Objectif : expliquer l'approche bayésienne non-paramétrique. Le paramètre d'intérêt est de dimension infinie et on étudie la loi a posteriori bayésienne correspondante sous l'angle de la convergence.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique.

Thèmes abordés :

1. Loi a priori, loi a posteriori. Cadre général d'obtention de vitesses de convergence
2. Processus gaussiens, adaptation à la régularité
3. Deep Bayes : réseaux de neurones, processus gaussiens profonds et adaptation à des structures cachées
4. Approximations variationnelles de lois a posteriori

Cours 8 : Inférence géométrique

Responsable : E. Aamari
Contact : aamari@lpsm.paris
Page web : https://perso.lpsm.paris/~aamari/

Objectif : Les données peuvent souvent être représentées par des nuages de points dans des espaces de grande dimension. En pratique, on constate que ces points ne sont pas distribués uniformément dans l'espace ambiant : ils se localisent à proximité de structures non-linéaires de plus petite dimension, comme des courbes ou des surfaces, qu'il est intéressant de comprendre. L'inférence géométrique, aussi appelée analyse topologique de données, est un domaine récent consistant en l'étude des aspects statistiques associés à la géométrie des données. Ce cours a pour but de donner une introduction à ce sujet en pleine expansion.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, introduction aux statistiques bayésiennes, méthodes de Monte-Carlo, calcul scientifique en R. Toutes les notions nécessaires de géométrie et de topologie seront introduites ou rappelées au fil du cours.

Thèmes abordés :

1. Introduction et motivations
2. Estimation du support d'une densité
3. Reconstruction de compact
4. Distance à la mesure et inférence robuste
5. Estimation de l'homologie d'une sous-variété
6. Persistance topologique
7. Graphes de Reeb et algorithme Mapper

Cours 9 : Modélisation et statistique bayésienne computationnelle

Responsable : N. Bousquet

Contact : nicolas.bousquet@sorbonne-universite.fr

Page web : http://nbousque.free.fr/research.php.html

Objectif : présenter d'une part les principales méthodologies de modélisation bayésienne appliquées à des problèmes d'aide à la décision en univers risqué, et d'autre part des méthodes avancées de calcul inférentiel permettant l'enrichissement de l'information utile, en fonction de l'emploi et de la nature des modèles. Des exemples réels (industrie, environnement, étude de risque..) illustrent abondamment ce cours.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, statistique inférentielle, statistique asymptotique, méthodes de Monte-Carlo, calcul scientifique en R et en Python (les deux langages seront utilisés). Des liens avec le machine learning et la statistique bayésienne non paramétrique sont fréquents.

Principaux axes :

1. Formalisation et résolution de problèmes d'aide à la décision en univers risqué, représentation probabiliste des incertitudes (Cox-Jaynes, de Finetti)
2. Maximum d'entropie, familles exponentielles, modélisation par données virtuelles
3. Règles d'invariance, de compatibilité et de cohérence pour les modèles bayésiens
4. Algorithmes de Gibbs, MCMC adaptatives, introduction aux chaînes de Markov cachées, méthodes de filtrage et approches ń likelihood-free ż (ABC) ; utilisation de logiciels adaptés
5. Modélisation bayésienne fonctionnelle, processus gaussiens, calibration par expériences numériques, critères d'enrichissement bayésiens

Cours 10 : Approximation et traitement de données en grande dimension

Responsable : A. Cohen

Contact : cohen@ann.jussieu.fr

Page web : https://www.ljll.math.upmc.fr/cohen/

Objectif : Reconstruire une fonction inconnue à partir de données ponctuelles, exacte ou bruitées, est un problème mathématique rencontré dans une multitude de contextes applicatifs. On peut citer l'interpolation ou l'apprentissage statistique à partir de données expérimentales, la mise au point de surfaces de réponses issues de codes numériques ou d'équations aux dérivées partielles. Ces tâches deviennent particulièrement délicates en grande dimension, les méthodes numériques classiques étant souvent mises en échec. Ce cours explorera les fondements mathématiques de ce problème aussi bien sous l'angle de la théorie de l'approximation que de l'analyse numérique et des statistiques. Des développements récents permettant de traiter certains problèmes en grande dimension seront abordés.

Prérequis : Notions fondamentales d'analyse fonctionnelle.

Thèmes abordés :

1. Théorie de l'approximation lineaire et non-linéaire

2. Epaisseurs et entropies de Kolmogorov
3. Interpolation, régression et méthodes de moindres carrés
4. Approximation parcimonieuse en grande dimension
5. EDP paramétriques et bases réduites

Cours 11 : Topics in modern machine learning

Responsable : E. Aamari, C. Boyer, I. Castillo, E. Roquain

Objectif : Ce cours fait un tour d'horizon des dernières tendances mathématiques dans la communauté du machine learning et de l'apprentissage statistique.

Thèmes abordés :

1. Théorie de l'approximation pour les réseaux de neurones
2. Dimension VC pour les réseaux de neurones
3. Bornes minimax pour la régression avec réseaux de neurones
4. GANs
5. Interpolation & overfitting bénin
6. Biais implicite des algorithmes stochastiques de gradient
7. Confidentialité

Cours 12 : Méthodes de simulation pour les modèles génératifs

Responsable : S. Le Corff

Contact : sylvain.le_corff@sorbonne-universite.fr

Page web : https://sylvainlc.github.io/

Objectif : La simulation de variables aléatoires en grande dimension est un véritable défi pour de nombreux problèmes de machine learning récents et pour l'apprentissage de modèles génératifs profonds. Ce problème se rencontre par exemple dans un contexte bayésien lorsque la loi a posteriori n'est connue qu'à une constante de normalisation près, dans le cadre des auto encodeurs variationnels ou encore pour la métamodélisation de systèmes dynamiques complexes. De nombreuses méthodes sont basées sur des approches de type "Importance Sampling" ou "Sequential Monte Carlo" dont nous rappelerons les éléments principaux. Pour surmonter les faiblesses inhérentes à ces méthodologies en grande dimension ou pour les modèles génératifs profonds (à base de réseaux récurrents, réseaux denses ou convolutifs), nous étudierons dans ce cours de récentes solutions en mettant l'accent sur les aspects méthodologiques. Le fonctionnement de ces méthodes sera illustré à l'aide de jeux de données publics pour des problématiques de "computer vision" et de prédictions de séries temporelles.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, notions concernant les méthodes de Monte Carlo, notions sur les chaînes de Markov.

Thèmes abordés :

1. Rappels sur les modèles de Markov cachés et leur inférence (score de Fisher, algorithme Expectation Maximization).

2. Méthodes de Monte Carlo séquentielles (filtrage et lissage) pour les modèles à espace d'état.
3. Méthodes de Monte Carlo séquentielles variationnelles.
4. Flots normalisants et "neural importance sampling".
5. Estimation variationnelle en ligne.

7.5.4 Stage

L'UE de Stage (MU5MAS04) totalise 18 ECTS. Celui-ci peut commencer dès la fin des cours, c'est-à-dire à partir du mois d'avril, et a une durée de 6 mois.

7.6 Responsables et site web

Responsables : Claire Boyer et Etienne Roquain.
Contacts : claire.boyer@sorbonne-universite.fr et etienne.roquain@sorbonne-universite.fr

Secrétariat : Yann Poncin
Contact : yann.poncin@sorbonne-universite.fr

Adresse : Sorbonne Université, 4 place Jussieu, Tour 14-15, 2ème étage, 75005 Paris.

Site : `https://m2stat.sorbonne-universite.fr/`

Chapitre 8

Parcours Agrégation de Mathématiques

8.1 Objectifs

La préparation à l'agrégation de mathématiques a un triple objectif :

— consolider les connaissances acquises par les étudiants jusqu'en M1, en couvrant un large spectre des mathématiques ;
— préparer les étudiants à passer dans les conditions les plus favorables le concours de l'agrégation externe de mathématiques ;
— former au métier d'enseignant, tant en lycée qu'en classes préparatoires.

Il s'agit d'une formation diplômante ; en particulier, tous les étudiants doivent faire une inscription en Master 2. Ceux qui ne sont pas déjà titulaires d'un M2 ou d'une équivalence en arrivant dans la formation, devront valider leur Master au moment des épreuves d'admissibilité pour avoir une chance de réussir le concours. Le jury délibérera donc suffisamment tôt pour délivrer aux lauréats le Master de sciences et technologies, Mention Mathématiques et Applications, parcours Agrégation de Mathématiques, et ce avant la publication de la liste d'admissibilité à l'agrégation.

8.2 Débouchés professionnels

Insertion professionnelle

Enseignement des mathématiques dans les lycées, classes préparatoires, premières années de l'enseignement supérieur (postes de PRAG).

Poursuite d'études

M2 Recherche et Doctorat : carrière de chercheur dans des entreprises ou de grands organismes de recherche, carrière universitaire d'enseignant-chercheur.

Chaque année, une centaine d'agrégés ont un report pour poursuite d'études. Environ 75 % des enseignants en Classes Préparatoires sont docteurs en mathématiques.

8.3 Organisation

La préparation à l'agrégation de mathématiques se déroule en un an, en deuxième année du Master de Mathématiques. Elle comprend :

— une solide préparation aux épreuves d'écrit, couvrant l'essentiel du programme d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités du concours ; ces cours sont complétés par des travaux dirigés et par des interrogations individuelles (colles) permettant de s'assurer que les notions essentielles ont été bien assimilées ;

— une préparation à l'oral, consistant d'une part en des cours ou leçons présentées par les enseignants, d'autre part en des leçons confiées aux étudiants, mais qui sont préparées en concertation avec les enseignants pour en améliorer la qualité ;

— une préparation aux options Probabilités et Statistiques (option A), Calcul Scientifique (option B), Algèbre et Calcul formel (option C), incluant des travaux pratiques sur ordinateur et des présentations de texte confiées aux étudiants. En début d'année universitaire, une initiation aux logiciels est organisée.

— l'organisation régulière d'épreuves écrites (concours blancs) et d'oraux blancs, permettant aux étudiants de se confronter aux conditions réelles du concours.

8.4 Publics visés, prérequis

La sélection des candidats admis à la préparation à l'agrégation se fait sur dossier. Une formation solide en mathématiques, du niveau de la première année de Master de mathématiques de Sorbonne université ou d'un Capes de mathématiques est exigée.

Nous accueillons également des étudiants avec un profil plus atypique, que ce soit des Docteurs, des ingénieurs issus des grandes écoles, ou simplement des personnes qui souhaitent se reconvertir dans l'enseignement après une première expérience dans un autre domaine d'activité. Ces personnes doivent constituer un dossier nous permettant d'évaluer leurs capacités à suivre la formation.

Nous conseillons fortement la lecture du rapport de jury de l'agrégation externe pour connaître les attentes du concours.

Choix des UE de Master 1

Le choix des Unités d'Enseignement en Master 1 dépend du projet de l'étudiant, suivant qu'il envisage ou non la poursuite d'études après l'année de préparation du concours.

Il convient de suivre d'une part ses goûts et d'autre part d'éviter d'avoir des lacunes importantes dans un domaine particulier. Les étudiants ne doivent donc délaisser ni l'algèbre, ni la géométrie, ni l'analyse, ni les probabilités. Nous indiquons dans la liste des UE de Master 1, celles qui nous semblent particulièrement pertinentes.

Stage intensif et travail de préparation pendant l'été

Nous conseillons fortement les étudiants, encore plus particulièrement les personnes en reprise d'études, de consacrer une partie de leur été à réviser et à consolider leurs bases. Le rythme de la formation est extrêmement soutenu, il est donc indispensable que les étudiants aient dès la rentrée une très bonne connaissance des contenus mathématiques de niveau L1/L2. Des connaissances de niveau plus élevé seront évidemment appréciées, mais c'est avant tout une grande maîtrise des bases qui est indispensable : on conseille d'ailleurs la lecture du début du rapport de jury pour étayer ce point.

Afin de guider les étudiants, nous organisons avec le service de la formation continue de Sorbonne université un stage intensif en juillet précédant l'année de préparation. Il s'agit de revoir les notions essentielles de L1-L2 de mathématiques qui ne seront pas reprises pendant l'année de préparation et de fournir des références bibliographiques permettant de combler les éventuelles lacunes pendant l'été.

Ce stage est facultatif et ne constitue en aucun cas un prélable à l'admission à la préparation à l'agrégation à Sorbonne université. Il est ouvert également aux étudiants extérieurs à Sorbonne université. Ce stage est en général suivi par environ 40 participants.

Renseignements et inscription ici : http://agreg.math.upmc.fr/reprise.html.

Concours spécial docteur

Depuis la session 2017 a été mis en place un concours docteur (appelé Agrégation externe spéciale) réservé aux détenteurs d'un doctorat (pas nécessairement en mathématiques), et avec un aménagement des épreuves, voir par exemple le rapport 2022 de cette agrégation. Nous accueillons volontiers les étudiants visant ce concours.

8.5 Liste et description des UE du parcours

INTITULÉ	SEM.	CODE	VOL.	ECTS
Préparation à l'écrit de Mathématiques Générales	1	5ME01	160h	15
Préparation à l'écrit d'Analyse et Probabilités	1	5ME02	160h	15
Préparation à l'oral I	2	5ME03	120h	9
Préparation à l'oral II	2	5ME04	120h	9
Préparation à l'oral d'option A, B, C	2	5ME05	120-140h	12
Total			∼690h	60

Les cours sont destinés à tous les étudiants, qu'ils soient dispensés ou non de la validation du M2. Ils couvrent la totalité du programme.

Les cours représentent à peu près 690 heures par an. Dix concours blancs, des oraux blancs et des colles sont organisés. L'emploi de temps se trouve ici : `http://agreg.math.upmc.fr/calendrier.html`. La formation n'est pas adaptée aux personnes ayant un emploi à côté.

8.6 Déroulement du concours

Les épreuves écrites d'admissibilé se déroulent généralement vers fin février/début mars et les épreuves orales d'admission entre la fin du mois de juin et le début du mois de juillet.

Les candidats intéressés sont invités à prendre connaissance des rapports du Jury de l'agrégation de Mathématiques, qui décrivent parfaitement les modalités du concours.

Le programme actualisé de l'agrégation de Mathématiques est disponible sur le site de l'Agrégation de Mathématiques.

Données

Nombre de places au concours, nombre de postes attribués, nombre d'étudiants de Sorbonne université admissibles, nombre de candidats de Sorbonne université admis. Les chiffres (+) indiquent les résultats pour le concours réservé aux candidats possédant un doctorat.

	Places	Postes	Admissibles	Admis
2012-2013	391	323	28	17
2013-2014	395	275	46	22
2014-2015	457	274	40	25
2015-2016	467	304	46	28
2016-2017	459(+15)	305(+10)	43	25
2017-2018	381(+16)	315(+10)	40(+2)	22
2018-2019	391(+16)	308(+11)	50(+1)	21(+1)
2019-2020	387(+16)	325(+7)	-	31
2020-2021	382(+16)	327(+13)	45	31(+1)
2021-2022	364(+16)	338(+9)	41	33
2022-2023	385(+15)	345(+10)	43	30(+1)

8.7 Responsable et site

Responsable du parcours Préparation à l'agrégation :
Jimmy Lamboley (jimmy.lamboley@imj-prg.fr)

Secrétariat, Couloir 14-15, bureau 202 - Tél : 01 44 27 53 38
Nicole Abrahamian (nicole.abrahamian@upmc.fr)

Site de la préparation à l'agrégation : http://agreg.math.upmc.fr/
Site du Master de mathématiques :
http://master.math.sorbonne-universite.fr/fr/index.html

Chapitre 9

Apprentissage et Algorithmes

9.1 Objectifs et description

La spécialité Apprentissage et Algorithmes (M2A) du Master propose une double formation en mathématiques et en informatique, centrée sur la science des données et l'intelligence artificielle, avec un accent particulier sur l'apprentissage statistique et l'apprentissage profond. La formation dispensée est à la fois :

— théorique, au travers d'un enseignement constitué de cours, travaux dirigés, travaux pratiques et projets ;

— opérationnelle, grâce à un stage au second semestre, et par le contact direct avec des entreprises et des laboratoires proposant des problèmes concrets d'apprentissage automatique.

La spécialité M2A s'appuie principalement sur le Laboratoire de Probabilités, Statistique et Modélisation (LPSM), l'Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR), le Laboratoire Jacques-Louis Lions (LJLL) et le Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6).

9.2 Débouchés professionnels

À l'issue de la spécialité M2A, les étudiants peuvent poursuivre par un doctorat (dans un laboratoire académique, un organisme de recherche ou en milieu industriel) ou intégrer directement le monde de l'entreprise.

9.3 Publics visés, prérequis

L'admission au sein de la spécialité M2A s'effectue après examen du dossier de candidature par une commission pédagogique constituée des principaux responsables. La spécialité s'adresse à des étudiantes et étudiants extrêmement motivés, qui nourrissent l'ambition de rejoindre des entreprises en pointe dans le domaine du traitement des données et de l'intelligence artificielle (grands groupes ou jeunes entreprises innovantes) et/ou de poursuivre par un doctorat dans le domaine de la statistique, de l'apprentissage automatique ou de l'apprentissage profond.

Il est vivement recommandé aux étudiantes et étudiants intéressés de posséder une solide formation initiale en mathématiques générales, statistique et informatique (cursus universitaire ou écoles d'ingénieurs), si possible validée avec mentions et éventuellement complétée par des MOOC.

9.4 Organisation

Chaque étudiant concourt pour 60 ECTS annuels qui se décomposent de la manière suivante.

Premier semestre (septembre à décembre)

— 12 ECTS pour quatre cours de mathématiques obligatoires (3 ECTS chacun) ;
— 18 ECTS pour trois cours d'informatique parmi quatre (6 ECTS chacun).

Second semestre (janvier à octobre)

— 12 ECTS pour 4 cours au choix (3 ECTS chacun, janvier à avril) ;
— 18 ECTS pour un stage, encourageant au maximum l'interdisciplinarité (avril à octobre).

L'objectif du second semestre est de laisser chaque étudiant construire un parcours propre afin de préparer au mieux son projet professionnel.

Examens

Les examens ont lieu à l'issue de chaque cours. Des rattrapages sont organisés en juin pour les étudiants n'ayant pas obtenu de notes satisfaisantes à la première session. Il n'y a pas de compensation entre les semestres.

9.5 Description des UE

9.5.1 Cours de mathématiques (3 ECTS chacun, 1er semestre)

Apprentissage statistique

Responsable : G. Biau
Contact : gerard.biau@sorbonne-universite.fr (https://perso.lpsm.paris/~biau/)
Modalités : 30h CM
Objectif : ce cours présente les grands principes de l'apprentissage statistique et les problématiques liées.
Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique.
Thèmes abordés :

1. Introduction au problème de la classification supervisée.
2. Principe de minimisation du risque empirique, théorie de Vapnik-Chervonenkis.
3. Bornes de performance, pertes convexes, sélection de modèle.

4. Classification non paramétrique, théorème de Stone, plus proches voisins, arbres.
5. Classification par réseaux neuronaux.
6. Quantification et clustering.

Introduction à l'apprentissage automatique

Responsable : M. Sangnier
Contact : maxime.sangnier@sorbonne-universite.fr (https://perso.lpsm.paris/~msangnier/)

Modalités : 30h CM

Objectif : ce cours introduit les principales méthodes de prédiction (classification et régression), de partitionnement et de réduction de dimension. Il présente l'apprentissage statistique d'un point de vue algorithmique et sera illustré par des travaux pratiques (en Python) ainsi que par un challenge en science des données.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, analyse convexe, algèbre linéaire et calcul scientifique en Python.

Thèmes abordés :

1. Analyse discriminante, régression logistique, machines à vecteurs supports.
2. k-plus proches voisins, arbres de décision et méthodes ensemblistes (forêts et boosting).
3. Modèle de mélange et algorithme EM, k-moyennes, partitionnement spectral et hiérarchique.
4. Analyse en composantes principales, projections aléatoires et positionnement multidimensionnel.

Méthodes du premier ordre pour l'optimisation non convexe et non lisse

Responsable : P. Tan
Contact : pauline.tan@sorbonne-universite.fr (https://sites.google.com/view/paulinetan/accueil)

Modalités : 24h CM

Objectif : ce cours explore la vaste théorie de l'optimisation non convexe et non lisse, par le biais des méthodes dites du premier ordre. Une attention particulière sera accordée aux problématiques liées à l'optimisation sur données en grande dimension.

Prérequis : analyse réelle.

Thèmes abordés :

1. Fonction à valeurs sur la droite réelle étendue, sous-différentiabilité, condition d'optimalité du premier ordre.
2. Méthodes de gradient (explicite, implicite), opérateur proximal, algorithme du point proximal.
3. Dualité de Lagrange et de Fenchel, conditions de Karush, Kuhn et Tucker.
4. Stratégies d'éclatement : *forward-backward splitting*, éclatement de Dykstra, méthode de Douglas-Rachford.

5. Optimisation par blocs : minimisations alternées (*block coordinate descent*), descentes (proximales) alternées.
6. Algorithmes primaux-duaux : méthode des directions alternées, algorithme de Chambolle-Pock.
7. Ouverture : variantes inertielles, pré-conditionnement, distances de Bregman.

Optimisation stochastique & généralisation pour le ML

Responsable : C. Boyer
Contact : claire.boyer@sorbonne-universite.fr (https://perso.lpsm.paris/~cboyer/)

Modalités : 30h CM

Objectif : l'objectif de ce cours est d'étudier la convergence de nombreux algorithmes stochastiques (séquentiel ou mini-batch) dans le cadre de l'apprentissage supervisé. Des séances de travaux pratiques permettront de les implémenter en Python. Théoriquement, ces algorithmes permettent de contrôler l'erreur de généralisation des prédicteurs ainsi formés. Le cours comportera également des séances d'ouverture pour explorer le flot de gradient, la quantification de l'incertitude en terme de généralisation, et des algorithmes d'optimisation pour le transport optimal.

Prérequis : Notions fondamentales de probabilités et statistique, calcul scientifique en Python.

Thèmes abordés :

1. Introduction à l'optimisation convexe.
2. Algorithmes du premier et du second ordre.
3. Algorithmes de gradient stochastiques.
4. Apprentissage dans un cadre stochastique.
5. Régularisation convexe.
6. Prédiction conformelle.

9.5.2 Cours d'informatique (6 ECTS chacun, 1er semestre)

Apprentissage automatique avancé et apprentissage profond

Responsable : P. Gallinari
Contact : patrick.gallinari@lip6.fr (http://www-connex.lip6.fr/~gallinar/gallinari/pmwiki.php)

Modalités : 28h CM, 28h TP

Objectif : ce cours dresse un panorama de l'apprentissage statistique aujourd'hui. Il aborde successivement les grandes problématiques du domaine et en présente les avancées majeures des dix dernières années, en les illustrant sur des grands champs applicatifs : traitement de données textuelles et multimédia, extraction d'information à partir de données collaboratives (médias sociaux), etc.

Prérequis : notions élémentaires d'apprentissage statistique et calcul scientifique en Python.

Thèmes abordés :

1. Théorie de l'apprentissage statistique, capacité de généralisation, dilemme biais-variance.
2. Apprentissage Supervisé : Classification, Réseaux de Neurones et Deep Learning, Machines à vecteurs de support, Méthodes à noyaux, Ranking, Problématique du passage à l'échelle.
3. Apprentissage non supervisé : Partitionnement, Modèles à variables latentes.
4. Autre paradigmes d'apprentissage : Apprentissage par renforcement, Apprentissage faiblement supervisé, Apprentissage semi-supervisé et transductif, Apprentissage actif, Transfer Learning
5. Méthodes d'ensembles : bagging, boosting.
6. Apprentissage et données structurées : Séquences et arbres, Graphes et données inter-dépendantes.

Apprentissage profond avancé et apprentissage par renforcement

Responsables : O. Sigaud et N. Thome

Contacts : olivier.sigaud@sorbonne-universite.fr (https://www.isir.upmc.fr/personnel/sigaud/) et nicolas.thome@isir.upmc.fr (http://cedric.cnam.fr/~thomen/)

Modalités : 28h CM, 28h TP

Objectif : acquérir les compétences en apprentissage par renforcement et méthodes neuronales stochastiques.

Prérequis : notions élémentaires d'apprentissage statistique et calcul scientifique en Python.

Thèmes abordés :

1. Markov Decision Process, programmation dynamique.
2. Apprentissage par renforcement tabulaire.
3. Apprentissage profond pour le renforcement (Deep Q learning, DDPG, TD3, Policy gradient, Reinforce, A2C, TRPO, PPO, SAC, TQCâĂę).
4. Apprentissage par imitation, Goal-Conditioned Reinforcement Learning.
5. Modèles génératifs : GAN, VAE, normalizing flows, diffusion models.
6. Machine learning informé par la physique (NeuralODE).

Bases de données large échelle

Responsable : M.-A. Baazizi

Contact : mohamed-amine.baazizi@lip6.fr (http://www-bd.lip6.fr/wiki/site/enseignement/master/bdle/start)

Modalités : 26h CM, 30h TP

Objectif : ce cours présente les grands principes du traitement des données massives.

Prérequis : notions fondamentales de programmation, interrogation des données avec SQL, couche physique des systèmes de gestion de bases données.

Thèmes abordés :

1. Introduction à la programmation parallèle et fonctionnelle sur Scala.
2. Données multidimensionnelles et entrepôts de données.
3. Paradigme Map-Reduce : modèle de calcul et implantation dans Spark.

4. Evaluation des requêtes distribuées.
5. Paradigme BSP (Bulk Synchronous Programming) et application pour l'analyse des graphes.

Reconnaissance des formes pour l'analyse et l'interprétation d'images

Responsable : M. Cord
Contact : matthieu.cord@lip6.fr (http://www-poleia.lip6.fr/~cord/)

Modalités : 28h CM, 28h TP

Objectif : ce cours aborde un ensemble de notions essentielles pour l'analyse et l'interprétation automatique du contenu visuel des images. A partir du signal image bidimensionnel, les différents systèmes de vision artificielle sont décrits. Outre les approches traditionnelles de vision par ordinateur, l'accent est mis sur les méthodes d'apprentissage statistique appliquées au traitement d'image. En particulier, la description des architectures profondes à base de réseaux de neurones et leur apprentissage (deep learning) occupent une place centrale dans ce cours. Les problématiques de vision étudiés concernent aussi bien des systèmes de classification et de segmentation, que de génération d'images. L'ensemble des concepts présentés font l'objet d'applications pratiques mises en oeuvre dans les séances de TPs.

Prérequis : notions basiques de représentation de l'image numérique, algorithmique de traitement statistique des données et calcul scientifique en Python.

Thèmes abordés :

1. Introduction à l'apprentissage supervisé.
2. Réseaux de neuronnes et machines à vecteurs supports.
3. Réseaux convolutionnels très large échelle, ImageNet.
4. Apprentissage par transfert et adaptation de domaine.
5. Réseaux antagonistes génératifs.
6. Segmentation et application à la conduite autonome.

9.5.3 Cours de spécialisation (3 ECTS chacun, 2d semestre)

Algorithmes stochastiques : de la finance aux données massives

Responsable : G. Pagès
Contact : gilles.pages@sorbonne-universite.fr (http://www.lpsm.paris/dw/doku.php?id=users:pages:index)

Modalités : 21h CM

Objectif : ce cours présent les principes mathématiques d'analyse des algorithme de gradient ou de pseudo-gradient stochastiques en apprentissage supervisé ou non supervisé.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités à temps fixe et à temps discrets (martingales, chaîne de Markov).

Thèmes abordés :

1. Introduction à l'optimisation, algorithme de Newton-Raphson, descente de gradient.
2. Simulation versus data : un changement de paradigme.

3. Genèse d'un algorithmes stochastique : pourquoi et comment. Descente de Gradient stochastique (SGD).
4. Théorèmes de convergence : lemme de Robbins-Siegmund et application à la convergence p.s.
5. Autres modes de convergence, vitesse : principe de moyennisation de Ruppert & Pòliak.
6. Application aux réseaux de neurones : rétro-propagation du gradient, approximation universelle ;
7. Apprentissage non supervisé : des k-means à la quantification optimale.
8. Algorithme de Langevin Monte Carlo.
9. Accélération d'une descente de gradient : SAGA, etc.

Analyse statistique de graphes

Responsable : C. Matias

Contact : catherine.matias@cnrs.fr (http://cmatias.perso.math.cnrs.fr/)

Modalités : 30h CM

Objectif : l'analyse statistique des réseaux d'interaction (ou graphes) connaît de nos jours un fort développement dans des domaines très variés (internet, biologie, réseaux sociaux, etc.) avec des données de bien plus grande taille (quelques centaines, milliers, voire millions de noeuds). L'objectif du cours est d'apprendre à manipuler et modéliser des données de type réseaux ainsi que de se familiariser avec des méthodes de classification et inférence statistique sur des graphes. De nombreux TP sous R permettront de pratiquer l'analyse de graphes et de mettre en oeuvre les méthodes statistiques.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, connaissance du logiciel R.

Thèmes abordés :

1. Statistiques descriptives élémentaires des réseaux et visualisation.
2. Détection de communautés et de la classification des noeuds.
3. Modèles de graphes aléatoires et des méthodes d'inférence statistique.

Apprentissage automatique pour données médicales

Responsable : X. Tannier

Contact : xavier.tannier@sorbonne-universite.fr (http://xavier.tannier.free.fr/)

Modalités : 30h CM

Objectif : le but de ce cours est double : d'une part, découvrir les défis réels de la biologie fondamentale et de la médecine où l'apprentissage statistique est déjà utilisé avec succès ; d'autre part, acquérir les bases pour modéliser des données médicales complexes.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, algèbre linéaire, Python.

Thèmes abordés :

1. Médecine et apprentissage statistique.
2. Clustering des données médicales : analyse exploratoire.

3. Stratification efficace des individus (patients) pour le développement des méthodes de médecine personnalisée.
4. Modèles interprétables.
5. A la recherche de la causalité dans des données (drug effects, variables latentes).

Approximation et traitement de données en grande dimension

Responsable : A. Cohen

Contact : cohen@ann.jussieu.fr (https://www.ljll.math.upmc.fr/~cohen/)

Modalités : 30h CM

Objectif : reconstruire une fonction inconnue à partir de données ponctuelles, exacte ou bruitées, est un problème mathématique rencontré dans une multitude de contextes applicatif. On peut citer l'interpolation ou l'apprentissage statistique à partir de données expérimentales, la mise au point de surfaces de réponses issues de codes numériques ou d'équations aux dérivées partielles. Ces tâches deviennent particulièrement délicates en grande dimension, les méthodes numériques classiques étant souvent mises en échec. Ce cours explorera les fondements mathématiques de ce problème aussi bien sous l'angle de la théorie de l'approximation, que de l'analyse numérique et des statistiques. Des développement récents permettant de traiter certains problèmes en grande dimension seront abordés.

Prérequis : notions fondamentales d'analyse fonctionnelle.

Thèmes abordés :

1. Théorie de l'approximation linéaire et non-linéaire.
2. Epaisseurs et entropies de Kolmogorov.
3. Interpolation, régression et méthodes de moindres carrés.
4. Approximation parcimonieuse en grande dimension.
5. EDP paramétriques et bases réduites.

Inégalités de concentration

Responsable : A. Ben-Hamou

Contact : anna.ben-hamou@sorbonne-universite.fr (http://www.lpsm.paris/dw/doku.php?id=users:benhamou:index)

Modalités : 24h CM

Objectif : en probabilités comme en statistiques, on est souvent amené à étudier les déviations dune variable aléatoire par rapport à son espérance. Alors que le théorème central limite nous renseigne sur les fluctuations asymptotiques, les inégalités de concentration fournissent des résultats non-asymptotiques (à n fixé). Les inégalités exponentielles classiques, comme l'inégalité de Hoeffding, concernent les sommes de variables indépendantes. Dans ce cours, nous verrons que le phénomène de concentration de la mesure apparaît aussi pour des fonctions bien plus complexes que la somme : « une variable qui dépend (de facon lisse) de beaucoup de variables indépendantes (mais pas trop de chacune d'entre elles) est essentiellement constante »(Michel Talagrand). La théorie de la concentration trouve des applications dans de nombreux domaines, et le cours sera illustré par beaucoup d'examples issus de la physique statistique, mais aussi d'autres contextes comme l'apprentissage statistique, les matrices et graphes aléatoires, le mélange de chaînes de Markov, la théorie de l'information.

Prérequis : notions de base en probabilités et statistique.

Thèmes abordés :

1. Inégalités de Poincaré et de Sobolev.
2. Méthode entropique.
3. Méthode de transport.
4. Isopérimétrie.
5. Méthode de Stein.

Inférence géométrique

Responsable : E. Aamari

Contact : aamari@lpsm.paris (https://perso.lpsm.paris/~aamari/)

Modalités : 30h CM

Objectif : les données peuvent souvent être représentées par des nuages de points dans des espaces de grande dimension. En pratique, on constate que ces points ne sont pas distribués uniformément dans l'espace ambiant : ils se localisent à proximité de structures non-linéaires de plus petite dimension, comme des courbes ou des surfaces, qu'il est intéressant de comprendre. L'inférence géométrique, aussi appelée analyse topologique de données, est un domaine récent consistant en l'étude des aspects statistiques associés à la géométrie des données. Ce cours a pour but de donner une introduction à ce sujet en pleine expansion.

Prérequis : notions de base en probabilités et statistique. Toutes les notions nécessaires de géométrie et de topologie seront introduites ou rappelées au fil du cours.

Thèmes abordés :

1. Introduction et motivations.
2. Estimation du support d'une densité.
3. Reconstruction de compact.
4. Distance à la mesure et inférence robuste.
5. Estimation de l'homologie d'une sous-variété.
6. Persistance topologique.
7. Graphes de Reeb et algorithme Mapper.

Méthodes de simulation pour les modèles génératifs

Responsable : S. Le Corff

Contact : sylvain.le_corff@telecom-sudparis.eu (https://sylvainlc.github.io/)

Modalités : 30h CM

Objectif : la simulation de variables aléatoires en grande dimension est un véritable défi pour de nombreux problèmes de machine learning récents et pour lâĂŹapprentissage de modèles génératifs profonds. Ce problème se rencontre par exemple dans un contexte bayésien lorsque la loi a posteriori nâĂŹest connue quâĂŹà une constante de normalisation près, dans le cadre des auto encodeurs variationnels ou encore pour la métamodélisation de systèmes dynamiques complexes. De nombreuses méthodes sont basées sur des approches de type âĂIJImportance SamplingâĂİ ou âĂIJSequential Monte CarloâĂİ dont nous rappelerons les éléments principaux. Pour surmonter les faiblesses inhérentes à ces méthodologies en grande dimension ou pour les modèles génératifs profonds (à base de réseaux récurrents, réseaux denses ou convolutifs), nous étudierons dans ce cours de récentes solutions en mettant lâĂŹaccent sur les aspects méthodologiques. Le fonctionnement de ces méthodes sera illustré à lâĂŹaide de jeux de données publics pour des problématiques de "computer vision" et de prédictions de séries temporelles.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique ; notions concernant les méthodes de Monte Carlo et les chaÃőnes de Markov.Notions concernant les méthodes de Monte Carlo.

Thèmes abordés :

1. Rappels sur les modèles de Markov cachés et leur inférence (score de Fisher, algorithme Expectation Maximization).
2. Méthodes de Monte Carlo séquentielles (filtrage et lissage) pour les modèles à espace dâĂŹétat.
3. Méthodes de Monte Carlo séquentielles variationnelles.
4. Flots normalisants et “neural importance sampling”.
5. Estimation variationnelle en ligne.

Modélisation et statistique bayésienne computationnelle

Responsable : N. Bousquet

Contact : nicolas.bousquet@edf.fr (http://nbousque.free.fr/research.php.html)

Modalités : 30h CM

Objectif : présenter d’une part les principales méthodologies de modélisation bayésienne appliquées à des problèmes d’aide à la décision en univers risqué sur des variables scalaires et fonctionnelles, et d’autre part des méthodes avancées de calcul inférentiel permettant l’enrichissement de l’information utile, en fonction de l’emploi et de la nature des modèles.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, introduction aux statistiques bayésiennes, méthodes de Monte-Carlo, calcul scientifique en R.

Thèmes abordés :

1. Formalisation et résolution de problèmes d’aide à la décision en univers risqué, représentation probabiliste des incertitudes (Cox-Jaynes, de Finetti).
2. Maximum d’entropie, familles exponentielles, modélisation par données virtuelles.
3. Règles d’invariance, de compatibilité et de cohérence pour les modèles bayésiens.
4. Algorithmes de Gibbs via OpenBUGS, MCMC adaptatives, introduction aux chaînes de Markov cachées, méthodes de filtrage et approches likelihood-free (ABC).

5. Modélisation bayésienne fonctionnelle, processus gaussiens, calibration par expériences numériques, critères d'enrichissement bayésiens.

Optimisation stochastique, apprentissage PAC-Bayésien et inférence variationnelle

Responsable : A. Godichon-Baggioni et B.-E. Chérief-Abdellatif
Contact : antoine.godichon_baggioni@sorbonne-universite.fr et badr-eddine.cherief-abdellatif@stats.ox.ac.uk (http://www.http://godichon.perso.math.cnrs.fr/ et https://badreddinecheriefabdellatif.github.io/)

Modalités : 30h CM

Objectif : présenter et analyser des méthodes stochastiques pour l'optimisation numérique ; donner un aperÃğu de la théorie PAC-Bayésienne, en partant de la théorie de lâĂŹapprentissage statistique (bornes de généralisation et inégalités oracles) et en couvrant les développements algorithmiques par inférence variationnelle, jusqu'aux analyses PAC-Bayésiennes récentes des propriétés de généralisation des réseaux de neurones profonds.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique, notions d'optimisation convexe, logiciel R ou Python.

Thèmes abordés :

1. Théorèmes de convergence pour les Martingales.
2. Algorithmes de gradient stochastiques et applications.
3. Généralisation en apprentissage statistique.
4. Théorie PAC-Bayésienne.
5. Inférence variationnelle.
6. Bornes de généralisation en apprentissage profond.

Programmation parallèle à grande échelle sur GPU pour les grandes masses de données

Responsable : L. Abbas Turki
Contact : lokmane.abbas_turki@sorbonne-universite.fr (https://www.lpsm.paris/pageperso/abbasturki/)

Modalités : 15h TP

Objectif : ce cours introduit la programmation CUDA et présente des éléments d'optimisation mémoire et algorithmique pour le calcul massivement parallèle sur cartes graphiques.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et programmation C.

Thèmes abordés :

1. Le streaming multiprocessor et son interprétation en termes de blocks et de threads.
2. L'utilisation de la mémoire globale, shared, registres et constante pour une simulation Monte Carlo.
3. Locked, mapped memory & concurrency.
4. Batch computing et applications : tri fusion, algèbre linéaire, EDP.
5. Utilisation GPU pour un problème de deep learning.

Sujets modernes d'apprentissage automatique

Responsables : E. Roquain
Contact : etienne.roquain@sorbonne-universite.fr (https://etienneroquain-81.webself.net/)

Modalités : 30h CM

Objectif : ce cours tentera de faire un tour d'horizon des dernières tendances mathématiques dans la communauté du machine learning et de l'apprentissage statistique.

Prérequis : notions fondamentales de probabilités et statistique.

Thèmes abordés :
1. Théorie de l'approximation pour les réseaux de neurones.
2. Dimension VC pour les réseaux de neurones.
3. Bornes minimax pour la régression avec réseaux de neurones.
4. GANs.
5. Biais implicite des descentes de gradient.
6. Interpolation & overfitting bénin.
7. Confidentialité.

9.5.4 Stage (18 ECTS, 2d semestre)

Le stage, encourageant au maximum l'interdisciplinarité, peut commencer dès la fin des cours, c'est-à-dire à partir du mois d'avril, et a une durée de 6 mois. L'évaluation est réalisée sur la base d'un rapport et d'une soutenance.

9.6 Responsables et site

Responsables : G. Biau (Professeur à Sorbonne Université), Patrick Gallinari (Professeur à Sorbonne Université), Maxime Sangnier (Maître de conférences à Sorbonne Université)
Contacts : gerard.biau@sorbonne-universite.fr
patrick.gallinari@lip6.fr
maxime.sangnier@sorbonne-universite.fr

Secrétariat : Laurence Dreyfuss
Contact : laurence.dreyfuss@sorbonne-universite.fr
Tél : 01 44 27 85 45

Adresse :
Sorbonne Université
Campus Pierre et Marie Curie
Tour 15-25, premier étage, bureau 109
Case courrier 202
4 place Jussieu
75005 Paris

Site : http://m2a.lip6.fr/

Chapitre 10

Parcours Calcul Haute Performance (HPC)

Le parcours HPC, ouvert depuis 2022-2023, s'étend sur les deux années de Master. Il a été initié dans le cadre de l'initiative EUMaster4HPC dont Sorbonne Université est un des partenaires. Les étudiant·es qui le suivent ont la possibilité d'être diplômé·es in fine à la fois du Master de Mathématiques et Applications et du Master d'Informatique, par le biais d'un accord entre ces derniers qui s'apparente aux dispositifs existants au niveau des doubles licences.

10.1 Objectifs

Le calcul haute performance joue un rôle de plus en plus important dans la recherche scientifique appliquée et l'innovation industrielle. L'architecture des supercalculateurs évolue rapidement et devient de plus en plus complexe. Ces ordinateurs sont formés d'unités de calcul/mémoire hétérogènes, nombreuses, et parfois physiquement distantes. Il en résulte un profond bouleversement de la manière de penser les algorithmes, où leur capacité à être parallélisés de manière effective acquiert une importance presque aussi grande que leur complexité algorithmique théorique au sens classique. En amont, cela impacte les contraintes et les paradigmes de la modélisation mathématique.

La disponibilité d'experts HPC, en particulier avec la double compétence math et info, est un facteur clé de l'indépendance en matière numérique en Europe et nécessite la formation d'étudiant·es hautement qualifié·es sur ces sujets. C'est-là l'objectif de ce parcours.

10.2 Débouchés professionnels

La double compétence math/info et la spécialisation HPC permettent de se diriger vers tous les métiers de la recherche et de l'innovation qui s'accompagnent de besoins importants en calculs : dans l'industrie et l'ingénierie de pointe, les centres de R&D publics et privés. Au-delà, la compétence propre HPC est très recherchée pour permettre le passage en production et à l'échelle de modèles développés par des ingénieurs IA à petite échelle.

10.3 Organisation

La formation puise ses enseignements pour moitié dans le Master de Mathématiques et Application, et pour moitié dans le Master d'Informatique, les étudiant·es étant inscrit·es dans les deux formations. Les agendas ont été adaptés pour qu'il n'y ait pas de chevauchement horaire entre les cours proposés. Pour cette raison le parcours est essentiellement tubulaire (peu de cours en optionnels). Les enseignements doivent pouvoir être accessibles aux non francophones, en particulier aux étudiant·es EUMaster4HPC en mobilité. Ceci implique l'anglais au minimum pour les supports écrits, et l'anglais en classe si le nombre de non francophones le justifie.

Les règles pour obtenir un double diplôme sont semblables à celles qui valent en licence : la validation de 36 ECTS au lieu de 30 ECTS à chacun des quatre semestres. Les étudiant·es peuvent choisir de ne valider que 30 ECTS, et de n'obtenir ainsi qu'un seul diplôme (il y a un contrat type math et un contrat type info, laissant chacun de côté un module à chaque semestre), leur formation demeure néanmoins pluridisciplinaire.

Les étudiant·es ont par ailleurs la possibilité de postuler à une bourse EUMaster4HPC. Celle-ci s'accompagne d'une obligation de mobilité (une année entière sur les deux) dans une des universités partenaires, ainsi que la participations à des challenges et écoles d'été (cfr à nouveau la page dédiée au niveau européen).

10.4 Publics visés, prérequis

Le parcours HPC s'adresse à des étudiant·es ayant suivi une formation solide à la fois en **mathématiques** et en **informatique**, et en particulier aux étudiant·es en provenance d'une double licence Math & Info. Les candidat·es en provenance de formations mono disciplinaires devront démontrer, que ce soit par leurs choix antérieurs de cours à option ou quelque autres réalisations de leur part, leur capacité à suivre de manière profitable les enseignements qui sont listés dans la section suivante.

Dans la mesure où cette formation est également suivie par des candidat·es en mobilité au sein du programme européen EUMaster4HPC, et que les enseignements et/ou les ressources pédagogiques sont pour nombre d'entre eux en langue anglaise, une maîtrise suffisante (permettant à minima de suivre le cours magistral) de cette dernière est requise.

10.5 Liste des UE

Semestre 1

— MU4IN100 (6 ECTS)
Architecture et réalisation des processeurs RISC

- MU4IN903 (6 ECTS)
  Programmation parallèle
- MU4IN902 (6 ECTS)
  Fondements de l'algorithmique algébrique
- MU4MA053 (6 ECTS)
  Calcul scientifique pour les grands systèmes linéaires
- MU4MA016 (6 ECTS)
  Structures de données et algorithmes pour la programmation
- MU4MA106 (6 ECTS)
  Fondements des méthodes numériques : différences et éléments finis, Fourier, ondelettes

L'obtention du double diplôme passe par la validation de l'ensemble des unités d'enseignement du Semestre 1. Pour le contrat Math uniquement, l'UE MU4IN100 peut être laissée de côté. Pour le contrat Info uniquement, l'UE MU4IN106 peut être laissée de côté.

Semestre 2

- MU4IN910 (6 ECTS)
  Numerical algorithms
- MU4IN106 (6 ECTS)
  Architecture des systèmes multi-processeurs et multi-coeurs
- MU4MA066 (6 ECTS)
  Optimisation numérique et science des données
- MU4MA029 (12 ECTS)
  Approximation des EDPs elliptiques et simulation numérique
- MU4IN906 (6 ECTS)
  Projet

L'obtention du double diplôme passe par la validation de l'ensemble des unités d'enseignement du Semestre 2. Pour le contrat Math uniquement, l'UE MU4IN106 peut être laissée de côté. Pour le contrat Info uniquement, l'UE MU4MA066 peut être laissée de côté.

Semestre 3

- MU5IN950 (6 ECTS)
  Floating-point arithmetic and error analysis
- MU5IN952 (6 ECTS)
  Advanced high-performance computing and programming many core architectures
- MU5IN160 (6 ECTS)
  Programmation parallèle des systèmes embarqués
- MU5MAM30 (6 ECTS)
  Des EDP à leur résolution par éléments finis
- MU5MAM29 (6 ECTS)
  Calcul haute performance pour les méthodes numériques et lâĂŹanalyse des données

— MU5MAM36 (6 ECTS)
  Méthodes d'approximation variationnelle des EDP

L'obtention du double diplôme passe par la validation de l'ensemble des unités d'enseignement du Semestre 3. Pour le contrat Math uniquement, l'UE MU5IN160 peut être laissée de côté. Pour le contrat Info uniquement, l'une parmi les trois UE MU5MAM30, MU5MAM29, MU5MAM36 peut être laissée de côté.

Semestre 4

— MU5MAM50 (6 ECTS)
  Méthodes modernes et algorithmes pour le calcul parallèle
— MU5MAM73 (6 ECTS)
  Approximation et traitement de données en grande dimension
— MU5MAM86 (6 ECTS)
  Réseaux de neurones et approximation numérique adaptative
— Thèse de Master (18 ECTS).

L'obtention du double diplôme passe par la validation de l'ensemble des unités d'enseignement du Semestre 4. Pour les contrats simple diplôme, une parmi les trois UE MU5MAM50, MU5MAM73, MU5MAM86 peut être laissée de côté.

Annexe : descriptifs des UE sans liens croisés pré-existants

MU4IN100 Architecture et réalisation des processeurs RISC (6 ECTS)

Dans cette UE, nous commenÃğons par présenter l'architecture du processeur Mips-32, puis nous introduisons la notion d'exécution pipeline. Nous détaillons la réalisation du processeur Mips-32 dans un pipeline à 5 étages et les conséquences de cette réalisation : l'effet retardé des branchements et le problème des dépendances de données. Puis, nous présentons une version Super-Scalaire à 2 pipelines de cette architecture. Nous abordons les techniques d'optimisation de code qui tentent de tirer le meilleur profit de ces réalisations : ré-ordonnancement des instructions, déroulage de boucles et pipeline logiciel. Enfin, nous nous intéressons à la réalisation du système mémoire. Nous introduisons la notion de hiérarchie de mémoires et des principes de fonctionnement de cette hiérarchie : la localité spatiale et temporelle. Nous détaillons les différents types de caches. Puis, nous présentons la notion de la mémoire virtuelle et le problème de la traduction des adresses virtuelles en adresses physiques.

MU4IN106 Architecture des systèmes multi-processeurs et multi-coeurs (6 ECTS)

Cette UE analyse les difficultés que l'on rencontre dans un système multi-processeur et les solutions que l'on peut y apporter d'un point de vue matériel et logiciel. On commence par présenter le rôle du bus système et le protocole de communication sur un bus. Puis, nous abordons les problèmes liées à la cohérence entre la mémoire et les caches dans le cas de données partagées entre plusieurs processus, les problèmes posés par le partage des périphériques ainsi que les mécanismes matériels supportant la communication et la synchronisation entre les tÃćches concurrentes dans les applications parallèles multitÃćches. Elle présente les différents mécanismes matériels utilisés par le système d'exploitation, pour fournir aux applications logicielles les différents services nécessaires : virtualisation de la mémoire, des périphériques, ou de la machine dans son ensemble.

MU5IN160 Programmation parallèle des systèmes embarqués (6 ECTS)

Le but de cette UE est de présenter les architectures haute performance embarqués généralistes que lâĂŹon trouve dans les systèmes embarqués à savoir les processeurs multicoeurs SIMD et les GPU. Ces architectures seront dâĂŹabord présentées séparément (caractéristique, modèle de programmation, points forts, points faibles) ainsi que leurs domaines applicatifs privilégiés. Cela est important de connaître pour connaître les les domaines dâĂŹefficacités de ces architectures et faire des choix dâĂŹoptimisations. Les principales techniques dâĂŹoptimisation de haut niveau (ingénierie algorithmique, transformation du memory layout) et bas niveau (transformation de nid de boucles) seront présentées et appliquées à des exemples représentatifs des principaux domaines applicatifs des systèmes embarqués (traitement du signal et des images, vision par ordinateur). Enfin des problèmes dâĂŹoptimisation et d'équilibrage de charge seront présentés et mise en pratique afin de tirer le maximum de performance dâĂŹune architecture hybride. Les problèmes dâĂŹautonomie et de consommation énergétique seront aussi abordés et traités.

Chapitre 11

Mobilité Internationale

11.1 Objectifs et descriptions

Les débouchés professionnels sont accrus pour les étudiants se présentant avec une première expérience internationale durant leur cursus universitaire. Les entreprises ont souvent des contacts internationaux et cherchent à benéficier de l'expérience internationale des étudiants qu'elles prévoient d'employer. Par ailleurs, dans l'éducation nationale, enseigner en classe européenne est une tâche gratifiante et enrichissante. Quant à la recherche en mathématiques, elle s'appuie sur des collaborations internationales depuis fort longtemps. Pour les étudiants de Master il s'agit aussi d'enrichir leur cursus d'une expérience culturelle différente, de découvrir d'autres systèmes d'enseignement, d'autres visions des mathématiques ou bien d'autres sujets.

Le système LMD, grâce à l'introduction des ECTS et des semestres, a permis de structurer les échanges internationaux qui sont maintenant simples à organiser et s'appuient sur un offre variée. Sorbonne Université a par ailleurs mis en place une politique volontariste pour conseiller et accompagner les étudiants dans leur démarche de mobilité (https://sciences.sorbonne-universite.fr/formation-sciences/international). Ce site est le premier à consulter pour organiser sa mobilité.

11.2 Quelques conseils supplémentaires

a) Les expériences passées ont montré en général que **les années du cursus les plus propices à une mobilité internationale en mathématique sont la L3 ou la M1** (ou, naturellement, le processus à long terme de préparation d'une thèse mais ce cas n'est pas considéré ici). Autrement dit, il est plutôt déconseillé d'envisager de partir pour l'année de M2, sauf raisons très spécifiques à discuter avec le coordinateur (adresse mail plus bas). **En outre, pour des mobilités en M1 d'un semestre, il est plus facile de trouver des équivalents pour le premier semestre de l'année académique et donc il est plutôt conseillé de choisir le premier semestre (ce qui veut dire que le dossier doit être déposé au milieu du deuxième semestre de L3).**

b) Les universités ont des pages d'information de qualité et de complétude extrêmement variables concernant l'accueil des étudiants internationaux. Du coup il est vraiment conseillé de s'y prendre bien à l'avance pour explorer les offres, et de ne pas multiplier démesurément les éventualités. Concentrez vous sur deux ou trois lieux à comparer.

c) Dans le système de mobilité internationale (hors double diplôme), vous passez les examens dans l'université d'accueil mais c'est Sorbonne Université qui vous délivrera le diplôme. De ce fait, le rôle du Coordinateur International sera de valider un *Learning Agreement*Âăqui fasse le poids par rapport aux cours que vous auriez dû suivre à Sorbonne Université : attendez-vous à une réelle exigence sur ce point et c'est aussi une raison pour laquelle il ne faut pas s'y prendre au dernier moment, surtout si un entretien avec le coordinateur international s'avère nécessaire.

d) D'une faÃğon générale, essayez de composer un *Learning Agreement* qui suive les conseils qui vous sont donnés par les universités d'accueil. Même si celles-ci font de gros efforts pour accueillir les étudiants internationaux (à l'instar de ce que Sorbonne Université fait pour sa part), il est clair qu'elles ne sont pas en mesure de faire du *à la carte* complet. Soyez donc souples dans vos demandes. Le coordinateur international ne vous demandera pas une concordance *parfaite* entre le programme que vous suivrez à l'étranger et celui que vous suivriez potentiellement à SU : il faut juste garder une cohérence globale et s'assurer que les niveaux d'étude sont à peu près identiques. **Soyez en particulier vigilants à une composition du L.A. qui soit compatible avec les choix que vous envisagez pour le M2**.

e) Bien entendu, l'ouverture au monde entier est une éventualité tout à fait positive. Prenez cependant note que les échanges Erasmus sont administrativement particulièrement bien coordonnés et en général plus simples à mettre en place. Donc si vous hésitez entre deux destinations, privilégiez plutôt celle qui rentre dans le cadre européen. Ce n'est qu'une suggestion et n'ayez aucune hésitation à demander une destination qui vous attire depuis longtemps.

11.3 Les programmes Erasmus

Sorbonne Université dispose d'un réseau très dense d'accords Erasmus qui couvre la plupart des pays d'Europe. Les échanges sont particulièrement actifs avec l'Allemagne (Bonn, Berlin, Münich...), l'Espagne, la Grande-Bretagne, l'Italie. Cette liste n'est pas limitative. N'hésitez pas à explorer des pays où vous avez envie de séjourner en fonction de vos motivations et de votre programme d'étude, et à en parler avec le coordinateur pédagogique Laurent Mazliak. Pour en savoir plus consulter `https://sorbonne.moveonfr.com/publisher/1/fra`.

11.4 Les doubles dîplomes

11.4.1 Politecnico di Milano

Le Master propose un cursus de double diplôme avec l'école d'ingénieurs "Politecnico di Milano"(PoliMi), à l'issu duquel les étudiants obtiennent les diplômes des deux établissements. Les étudiants admis suivent pendant la première année le programme de "Mathematical Engineering, study plan Laureat Magistrale -MSc-orientation in Computational Science and Engineering" à Milan. Ils continuent leurs études en seconde année à Paris au sein de Sorbonne Université. Comme la première année s'effectue en M1 à Milan, les étudiants retenus sont sélectionnés avant la fin juin, pour permettre leur inscription au PoliMI.

11.4.2 Shanghai Jiao Tong University

Un accord similaire existe avec la Shanghai Jiao Tong University à Shanghai. Les étudiants étudie la première année à Sorbonne Université, la deuxiènne année se déroule à Shanghai. Cet accord est spécifique au parcours Mathématiques de la modélisation.

11.5 Autres accords

L'UPMC propose également des accords avec de nombreuses universités en dehors du périmètre européen. On notera l'Amérique du Nord avec les accords MICEFA et TASSEP qui couvrent de nombreuses destinations. Des accords bilatéraux sont aussi signés avec diverses université d'Amérique du Sud et du Nord, par exemple The University of Chicago et Brown University aux niveaux L3 et M. Pour en savoir plus http://sciences.sorbonne-universite.fr/fr/international/mobilites_internationales/mobilite_d_etudes/etats_unis.html. En Asie on notera des accords d'échanges avec Singapour, Taiwan, Shanghai. Un accord avec l'IMPA à Rio de Janeiro, spécifique aux mathématiques, concerne l'ensemble des mathématiques

voir http://math.sjtu.edu.cn/index.shtm

11.6 Responsables et sites

• Responsable pédagogique de la mobilité : laurent.mazliak@sorbonne-universite.fr

• *PoliMI* Accord spécifique avec le Politecnico dI Milano
Responsable : benoit.perthame@sorbonne-universite.fr

• *SJTU* Accord spécifique avec la Shanghai Jiao Tong University
Responsable : benoit.perthame@sorbonne-universite.fr

Chapitre 12

Renseignements administratifs

12.1 Scolarité

Responsable administratif du master	**Tarik RERZKI** Tour 14-15 2ème étage bureau 209	tarik.rerzki
Inscriptions administrative M1 et M2	**Amina HAMADI** tour 14-15, 2ème étage bureau 203	amina.ham
Inscriptions pédagogiques M1	**Mathilde BESNARD** tour 14-15, 2ème étage bureau 205	mathilde.b
Télé-Science 6 Formations ouvertes à distance	**Bruno DEHAINAULT** tour 14-15, 2ème étage bureau 210	bruno.deha
M2 Parcours Agrégation	**Nicola ABRAHAMIAN** tour 14-15, 2ème étage bureau 202	nicole.abra
M2 Parcours Mathématiques fondamentales et certificat Big data	**Laurence DREYFUSS** tour 15-25, 1er étage bureau 109	laurence.dr
M2 Parcours "Mathématiques de la modélisation" et ingénierie	**Francelise HARDOYAL** tour 15-25, 1er étage bureau 107	francelise.h
M2 Parcours "Probabilités et modèles aléatoires", "Probabilités et finance" et statistique.	**Yann PONCIN** tour 15-25, 1er étage bureau 107	yann.ponci

12.2 Inscriptions

Les étudiants seront amenés à effectuer deux types différents d'inscriptions, qui se font en deux étapes *distinctes* et *successives*. Elles sont *toutes les deux obligatoires* pou rpouvoir se présenter aux examens.

- **L' inscription administrative :** L'inscription administrative se fait auprès de la scolarité de Master. Elle permet la délivrance de la carte d'etudiant par la Scolarité centrale.
- **L'inscription pédagogique :** Il s'agit du choix du parcours et des unités d'enseignements (UE). Elle se fait auprès des secrétariats pédagogiques de la mention et des différentes spécialités. Elle conditionne l'inscription aux examens. Chaque étudiant devra choisir 2 contrats dans l'année, 1 par semestre d'examens. Pour chaque Unité d'Enseignement, il est organisé 2 sessions d'examen. Pour l'inscription aux UE du 1er semestre, se munir de la carte d'étudiant et d'une photo.

12.3 Calendrier du master 2023/2024

Calendrier du Master 1 de mathématiques
Sorbonne Université – 2023-2024

Jours fériés pendant les semestres *: Lundi 1er avril 2024*
Forum Emploi Math *: Mardi 10 octobre 2023* ***Premier atelier OIP*** *: X*
Atrium des métiers *: Y*
Il n'y aura ***pas d'enseignement*** *le 10 octobre, et les après-midi des X et Y.*

Présentation du M1	Lundi 4 Septembre 2023 – 10h, amphi Durand Campus Jussieu
Présentation des parcours de M2	Mercredi 6 septembre 2023 – 14h, amphi Durand Campus Jussieu

1er SEMESTRE

Cours
Lundi 4 septembre au Vendredi 8 décembre 2023

TD
Lundi 11 septembre au Vendredi 15 décembre 2023

Ateliers OIP : à déterminer

Interruption des enseignements
Du 30 octobre au 3 novembre 2023

Examens du Semestre 1 - 1ère session
Du lundi 8 Janvier au vendredi 12 janvier 2024

Examens du Semestre 1 - 2ème session
Du lundi 27 mai au vendredi 31 mai 2024

2ème SEMESTRE

Cours
Lundi 15 janvier au Vendredi 12 avril 2024

TD
Lundi 23 janvier au Vendredi 19 avril 2024

Interruption des enseignements
Du 19 au 23 février 2024

Examens du Semestre 2 - 1ère session
Lundi 6 mai au mardi 21 mai 2024

Examens du Semestre 2 - 2ème session
Du lundi 10 juin au vendredi 21 juin 2023